

**EINE REHABILITATION DER GEWÖHNLICHEN  
KLEINST-QUADRATE-METHODE ALS  
SCHÄTZVERFAHREN IN DER ÖKONOMETRIE**

Dissertation  
vorgelegt dem Fachbereich  
Rechts- und Wirtschaftswissenschaften  
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Staatswissenschaften  
(Dr. rer. pol.)

von Diplom-Mathematiker  
**Walter Krämer**

**'979**







**EINE REHABILITATION DER GEWÖHNLICHEN  
KLEINST-QUADRATE-METHODE ALS  
SCHÄTZVERFAHREN IN DER ÖKONOMETRIE**

Dissertation  
vorgelegt dem Fachbereich  
Rechts- und Wirtschaftswissenschaften  
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Staatswissenschaften  
(Dr. rer. pol.)

von Diplom-Mathematiker  
**Walter Krämer**

EINE REHABILITATION DER GEWÖHNLICHEN  
KLEINST-QUADRAT-METHODE ALS  
SCHÄTZVERFAHREN IN DER ÖKONOMETRIE



Erstberichterstatter: Prof. Dr. H. Stöwe

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. E. Härtter

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1979

Ich danke dem Erstreferenten, Prof. Dr. Heinz Stöwe, sowie Herrn Dr. Eugen Oswald für tatkräftige Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit und Herrn Michael Wenig für stets bereitwillige Hilfestellung beim Umgang mit elektronischen Rechenanlagen.



## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                                          | Seite   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1. Einleitung                                                                                                                                            | 1       |
| 2. Frühere Versuche zur Rehabilitierung der<br>gewöhnlichen Kleinst-Quadrate-Methode als<br><b>Schätzverfahren</b> in simultanen Gleichungs-<br>systemen | 5       |
| 3. Simultane Gleichungssysteme                                                                                                                           | 11      |
| a) Modell und Identifikation                                                                                                                             | 11      |
| b) Definition der Schätzverfahren                                                                                                                        | 19      |
| c) Eigenschaften der Schätzverfahren                                                                                                                     | 33      |
| 4. Ein neuer Simulationsansatz                                                                                                                           | 43      |
| a) Allgemeines zu Monte-Carlo<br>Experimenten                                                                                                            | 43      |
| b) Qualitätskriterien                                                                                                                                    | 48      |
| c) Frühere Simulationsstudien                                                                                                                            | 51      |
| d) Eigene Zufallsexperimente                                                                                                                             | 60      |
| e) Varianzanalytische Betrachtung der<br>Trefferquoten                                                                                                   | 79      |
| 5. Zusammenfassung                                                                                                                                       | 85      |
| <br>Anhang                                                                                                                                               | <br>86  |
| a) Die gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Methode<br>im klassischen Regressionsmodell mit kor-<br>relierten Störgrößen                                         | 87      |
| b) Algol-Programm zu 4 d)                                                                                                                                | 95      |
| <br>Literaturverzeichnis                                                                                                                                 | <br>109 |



## 1. Einleitung

"The concrete results of our efforts at quantitative measurement often seem to get worse the more refinement of tools ... we call into play!"

Diese Worte von Haavelmo<sup>1</sup> anlässlich seiner Amtsübernahme als Präsident der Econometric Society kennzeichnen deutlich eine gewisse Ernüchterung seitens derjenigen Forscher, die sich in einer steten Verfeinerung der ökonometrischen Schätz- und Testverfahren den entscheidenden Fortschritt in dieser Wissenschaft versprochen hatten. Bezeichnenderweise stammen sie von einem Mann, der wie wohl kein anderer mit seiner bahnbrechenden Arbeit "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations" die Forschungsaktivitäten seiner Fachkollegen in Richtung Methodenverbesserung und damit, wie im folgenden gezeigt werden soll, in die möglicherweise falschen Kanäle geleitet hat.<sup>2</sup>

In dieser Arbeit weist Haavelmo nach, daß die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate (im folgenden mit OLS für "Ordinary Least Squares" abgekürzt), angewandt auf eine beliebige Strukturgleichung eines simultanen Gleichungssystems, im allgemeinen nur verzerrte Schätzwerte der jeweiligen Strukturparameter liefert. Und, was häufig als weit gravierenderer Mangel angesehen wird: Mit wachsendem Stichprobenumfang konvergieren die Schätzwerte nicht gegen die wahren Werte, d.h. OLS ist nicht konsistent. Aus diesen Eigenschaften wurde dann vielfach auf die völlige Unbrauchbarkeit von OLS als Schätzverfahren in simultanen

---

<sup>1</sup> Haavelmo, T., "The Role of the Econometrician in the Advancement of Economic Theory", *Econometrica* 26, 1958, 351-357.

<sup>2</sup> Haavelmo, T., "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations", *Econometrica* 11, 1943, 1-12.

Gleichungssystemen geschlossen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist dagegen, die Eignung (im Sinn von Gleichwertigkeit gegenüber erheblich aufwendigeren Alternativverfahren) dieser einfachen Methode nachzuweisen.

Dieses Vorhaben mag auf den ersten Blick vermessen erscheinen, denn die gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Methode sieht sich einer zahlreichen Konkurrenz gegenüber. Für viele Situationen, in denen die zur BLUE-Eigenschaft nötigen Voraussetzungen fehlen, existieren mehr oder weniger aufwendige Konkurrenzverfahren. Der für ökonometrische Anwendungen wichtigste Fall ist aber wohl die stochastische Abhängigkeit von erklärenden Variablen und Störgrößen, wie er vor allem in simultanen Gleichungssystemen auftritt.<sup>1</sup> Um jedoch mit Hildreth zu sprechen:<sup>2</sup> "Simultaneity of economic relationships is one of a number of possible sources of specification error in empirical applications of the usual single-equation least squares procedures. Others are inappropriate choices of variables; use of an inappropriate algebraic form for the equation; errors of observation; nonnormal, nonhomogeneous, or nonindependent disturbances and variable coefficients."

Charakteristischerweise berücksichtigen Alternativverfahren in ihrem Konstruktionsprinzip jeweils nur einige, meistens einen einzigen, dieser "specification errors". Treten dann diese, und, was wichtig ist: keine anderen, Abweichungen auf, sind in der Tat die Alternativverfahren der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate asymptotisch überlegen. Im Einzelfall kann das etwa bedeuten, daß diese Verfahren im Gegensatz zu OLS konsistente oder asymptotisch erwartungstreue Schätzungen liefern oder eine "kleinere" -im Sinne der bekannten

---

<sup>1</sup> Ein weiteres Beispiel wären etwa sogenannte "error in variables"-Modelle

<sup>2</sup> Hildreth, C., "Simultaneous Equations - Any Verdict Yet?", *Econometrica* 28, 1960, 846-853.

Halbordnung für symmetrische Matrizen- asymptotische Kovarianzmatrix besitzen. Eigenschaften bei endlichen Stichproben kennt man dagegen selten. Gerade diese wären aber bei den in der Ökonometrie üblichen kleinen Stichproben wichtig.

Ein weiterer, beim Vergleich von Schätzverfahren oft vernachlässigter Aspekt, ist der folgende:

In der Ökonometrie treten im Gegensatz zu anderen Wissenschaften, die sich stochastischer Modelle bedienen, häufig erhebliche Konflikte zwischen Modell und Wirklichkeit auf, und das nahezu zwangsläufig wegen der Komplexität des untersuchten Gegenstandes. Vor allem Liu hat auf diesen Umstand in seinen Schriften immer wieder hingewiesen: "...economic theory requires the inclusion of much a larger number of variables than those included in existing models of economic structures. . . . Statistical difficulties rather than economic theory or a priori information are probably responsible for the tendency toward oversimplification of structural relationships." <sup>1</sup>

Mit Ausnahme einiger Arbeiten von Fisher sind die Konsequenzen der von Liu erwähnten und anderer denkbarer Arten von "oversimplification" in Hinsicht auf die Qualität konkurrierender Schätzverfahren in der Literatur bislang jedoch wenig beachtet worden. <sup>2</sup>

Die Hypothese, die im folgenden an Hand von Monte-Carlo-Experimenten für den Fall simultaner Gleichungssysteme überprüft werden soll, kann nun wie folgt formuliert werden:

Bei endlichen Stichproben und mehr oder weniger "fehlspezifizierten" Modellen verhalten sich einfache Verfahren (hier OLS) am robustesten,

---

<sup>1</sup> Liu, T. C., "Underidentification, Structural Estimation, and Forecasting", *Econometrica* 28, 1960, 855-865.

<sup>2</sup> Fisher, F. M., "The Relative Sensitivity to Specification Error of Different k-Class Estimators", *Journal of the American Statistical Association* 61 (im folgenden JASA abgekürzt), 1966, 345-356, und Fisher, F. M., "Approximate Specification and the Choice of a k-Class Estimator", *JASA* 62, 1967, 1265-1276.

d.h. sie werden von der mit einer Fehlspezifikation einhergehenden Qualitätsverschlechterung relativ am wenigsten betroffen.

Anerkanntermaßen sind Simulationsstudien bislang der einzige Weg, Schätzverfahren für simultane Gleichungssysteme in endlichen Stichproben zu untersuchen.<sup>1</sup> Bevor wir in Kapitel 4 die Ergebnisse eigener Experimente vorstellen, sollen in Kapitel 2 kurz zwei frühere Versuche zur Rehabilitierung der gewöhnlichen Kleinst-Quadrate-Methode diskutiert werden. Kapitel 3 dient der Vorstellung und Diskussion konkurrierender Schätzverfahren in simultanen Gleichungssystemen. In einem Anhang soll schließlich noch das gewöhnliche (klassische)<sup>2</sup> Regressionsmodell zur Sprache kommen. Dessen Bedeutung für simultane Gleichungssysteme liegt darin, daß die Gleichungen der reduzierten Form eines solchen Systems vielfach den Voraussetzungen der klassischen Regressionstheorie genügen. Im Gegensatz zu Kapitel 4 ist hier die analytische Ableitung einiger Ergebnisse möglich.

---

<sup>1</sup> Ausnahmen werden in 3c) besprochen. Die wenigen bislang analytisch abgeleiteten Ergebnisse sind für den Vergleich konkurrierender Verfahren jedoch wenig nützlich.

<sup>2</sup> Hier wie im folgenden meinen wir mit "klassischem" Regressionsmodell Systeme der Gestalt  $y = X + u$  mit konstantem, nichtstochastischem  $X$  und einem Zufallsvektor  $u$  mit Erwartungswert 0 und existierender - nicht notwendig einem Vielfachen der Identitätsmatrix  $V$ .

## 2. Frühere Versuche zur Rehabilitierung der gewöhnlichen Kleinst-Quadrate-Methode als Schätzverfahren in simultanen Gleichungssystemen

Die im Gefolge der Haavelmo'schen Arbeit auftretende Skepsis gegenüber der gewöhnlichen Kleinst-Quadrate-Methode schien lange Zeit einen Gebrauch dieses Verfahrens in simultanen Gleichungssystemen auszuschließen. Sogar wegweisende Arbeiten etwa von Tinbergen und anderen aus den Gründerjahren der Ökonometrie stießen im nachhinein -so Klein<sup>1</sup> - lediglich wegen der Verwendung von OLS als Schätzverfahren auf Bedenken. Immerhin sind zwei Versuche von Wold und Waugh<sup>2</sup> bekannt, die weitere Verwendung dieser Methode auch in simultanen Gleichungssystemen zu rechtfertigen. In beiden Fällen wird im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit an Hand von Modellen argumentiert, die als getreue Abbilder der Realität interpretiert werden. Zudem stehen asymptotische Eigenschaften im Mittelpunkt, die für konkrete kleine Stichproben nicht immer die ausschlaggebenden Kriterien sind. Trotzdem wird der Ansatz von Waugh im folgenden näher kommentiert. Zum einen haben seine Argumente in der Literatur eine gewisse Diskussion ausgelöst, und die Vorgehensweise läßt sich an einem einfachen Modell demonstrieren, das auch für spätere Zwecke als Beispiel nützlich ist.

Seien dazu zwei endogene Variable X und Y gegeben, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$(2.1) \quad Y = aX + u_1$$

$$(2.2) \quad X = bY + u_2$$

---

<sup>1</sup> Klein, L. R., "Single Equation vs. System Methods of Estimation in Economics", *Econometrica* 28, 1960, 866-871.

<sup>2</sup> Wold, H. und Mosbaek, E., *Interdependent Systems-Structure and Estimation*, Amsterdam 1970.  
 Waugh, F. V., "The Place of Least Squares in Econometrics", *Econometrica* 29, 1961, 386-396.

In Matrixschreibweise:

$$(2.3) \quad (Y, X) \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -a & 1 \end{bmatrix} = (u_1, u_2).$$

Dabei seien  $a$  und  $b$  unbekannte, aber feste Konstanten, und  $u_1$  und  $u_2$  unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit identischer Varianz  $\sigma^2$ . Waugh selbst läßt verschiedene Varianzen zu, was hier zur Vereinfachung ausgeschlossen ist. Die Kovarianzmatrix  $\Sigma_u$  des Zufallsvektors  $u := (u_1, u_2)$  hat somit die Gestalt  $\Sigma_u = \sigma^2 I$ . Ferner wird im weiteren  $a \cdot b \neq 1$  vorausgesetzt. Diese Annahme ist für die Existenz der reduzierten Form wesentlich. Außerdem wird die Annahme  $a + b \neq c$  getroffen. Unter dieser Voraussetzung ist das System (2.3) eindeutig identifizierbar.

Zum Beweis betrachte man eine reguläre  $(2 \times 2)$ -Matrix  $T$  und die Matrizen  $\Gamma T$  sowie  $T' \Sigma_u T$  mit

$$\Gamma := \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -a & 1 \end{bmatrix}.$$

Genau dann ist das System (2.3) eindeutig identifizierbar, wenn die  $(2 \times 2)$ -Einheitsmatrix  $I$  die einzige Transformation  $T$  liefert, dergestalt daß  $\Gamma T$  sämtliche Restriktionen bezüglich  $\Gamma$  (insbesondere Hauptdiagonale = 1) und  $T' \Sigma_u T$  sämtliche Restriktionen bezüglich  $\Sigma_u$  erfüllt (Vielfaches der Einheitsmatrix). Dieser leicht einzusehende Satz wird in Kapitel 3 bewiesen. Dort erfolgt auch eine allgemeine Diskussion simultaner Gleichungssysteme und damit zusammenhängender Begriffe. Wegen  $\Sigma_u = \sigma^2 I$  hat man aber

$$T' \Sigma_u T = \sigma^2 T' T,$$

woraus folgt, daß  $T$  die folgende Gestalt haben muß:

$$T = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

mit geeignet gewählten Konstanten  $c$  und  $d$ . Daraus ergibt sich:

$$\Gamma T = \begin{bmatrix} c+bd & d-bc \\ -d-ac & c-ad \end{bmatrix}$$

Die Elemente der Hauptdiagonale von  $\Gamma T$  müssen gleich 1 sein. Insbesondere folgt daraus:

$$c+bd - c+ad = d(a+b) = 0$$

Wegen  $a+b \neq 0$  ergibt das  $d=0$ . Weiter folgt wegen  $c+bd = 1$ , daß  $c=1$ . Damit ist aber die Übereinstimmung von  $T$  mit der  $(2 \times 2)$ -Einheitsmatrix und die eindeutige Identifizierbarkeit von (2,3) bewiesen.

Seien nun  $N$  Beobachtungen  $x_1, \dots, x_N$  und  $y_1, \dots, y_N$  der Variablen  $X$  und  $Y$  gegeben. Nach Waugh sollen Modelle wie (2,3) letztendlich und vor allem der Prognose dienen, d. h. (in der Waugh'schen Interpretation) Informationen liefern über den bedingten Erwartungswert von  $Y$ , gegeben  $X = x_{N+1}$  (und analog über den bedingten Erwartungswert von  $X$ , gegeben  $Y = y_{N+1}$ ). Dies erreiche man am besten über die OLS-Schätzung von  $a$ , die gegeben ist durch

$$(2.4) \quad \hat{a}_{OLS} = \left( \sum_{t=1}^N x_t y_t \right) / \left( \sum_{t=1}^N x_t^2 \right)$$

Ferner gilt

$$(2.5) \quad E(Y \mid X=x_{N+1}) = \frac{a+b}{1+b} x_{N+1}$$

wie man leicht an Hand der reduzierten Form von (2,3) erkennt:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Y &= (1-ab)^{-1} (u_1 + a u_2) \\ X &= (1-ab)^{-1} (b u_1 + u_2) \end{aligned}$$

$X$  und  $Y$  sind also gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix

$$(2.7) \quad \Sigma = \left( \frac{c}{1-ab} \right)^2 \begin{bmatrix} 1+a^2 & a+b \\ a+b & 1+b^2 \end{bmatrix}$$

(2.5) folgt nun sofort aus (2.7) unter Verwendung eines allgemeinen Satzes der multivariaten Statistik über bedingte Erwartungswerte.<sup>1</sup> Ferner erhält (2.7) die Bedeutung der Identifizierbarkeitsbedingung  $a \neq -b$ . Ist diese Bedingung verletzt und zusätzlich  $a$  (und damit auch  $b$ )  $\neq 0$ , erhält man durch Vertauschen von  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Strukturen für (2.3), die beide zur gleichen Matrix (2.7) führen. Da diese Matrix die maximale durch Beobachtungen erhältliche Information über  $a$  und  $b$  enthält, ist (2.3) nicht eindeutig identifizierbar.

Waugh behauptet nun, daß

$$(2.8) \quad E(\hat{a}_{OLS}) = \frac{a+b}{1+b^2}$$

und leitet daraus die Berechtigung zum Gebrauch von OLS in simultanen Gleichungssystemen ab. Srinivasan weist jedoch darauf hin, daß (2.8) in dieser Form falsch ist und nur die schwächere Beziehung

$$(2.9) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{a}_{OLS} = \frac{a+b}{1+b^2}$$

gilt.<sup>2</sup> Mit anderen Worten: OLS liefert eine konsistente Schätzung für den bedingten Erwartungswert von  $Y$  gegeben  $X = x_{N+1}$ . Dieses Ergebnis erhält man aber auch, wenn man beliebige konsistente Schätzungen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  für  $a$  und  $b$  in die rechte Seite von (2.5) einsetzt. Somit läßt sich aus dem Waugh'schen Argument allein keine Rechtfertigung für den bevorzugten Gebrauch von OLS ableiten.

Eine mechanische Anwendung der in Kapitel 3 vorzustellenden Abzähl- und Rangkriterien auf (2.3) könnte den Einwand nahelegen,

---

<sup>1</sup> Siehe etwa Anderson, T. W., "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis", New York 1958, S. 29.

<sup>2</sup> Srinivasan, T. N., "Least Squares and Conditional Prediction", Econometrica 33, 1965, S. 244.

daß eine konsistente Schätzung von  $a$  und  $b$  überhaupt nicht möglich sei. In der Tat sind nahezu alle der weiter unten vorgestellten, speziell für simultane Gleichungssysteme entwickelten Schätzverfahren hier nicht anwendbar. Eine Ausnahme ist etwa das Wold'sche Fixpunktverfahren (S. 28). Es liegt hier der für praktische Anwendungen sicher nicht sehr bedeutsame Fall vor, daß die Identifizierbarkeit eines simultanen Gleichungssystems lediglich durch Restriktionen bezüglich der Kovarianzmatrix der Störgrößen gewährleistet ist.

Fisher, der die formale Gültigkeit der Waugh'schen Argumente (zu Unrecht) eingesteht, hebt eine weitere Unstimmigkeit in dessen Argumentation hervor:<sup>1</sup>

Akzeptiert man als wichtigste Aufgabe ökonometrischer Gleichungssysteme die Konstruktion von Prognosen, so ist, um in obigem Beispiel zu bleiben, eine noch so exakte Information über  $E(Y|X=x_{T+1})$  wegen fehlender Kenntnis von  $x_{T+1}$  wenig nützlich. Waugh habe den Prognoseprozeß willkürlich in zwei Teile gespalten und nur den zweiten Teil betrachtet. In der Praxis müßten aber  $X_{T+1}$  und  $Y_{T+1}$  gleichzeitig prognostiziert werden. Dies erreiche man am besten über die reduzierte Form des Gesamtmodells, welche man wiederum am sinnvollsten über konsistente Schätzungen der Strukturparameter erhalte.

Dieser These Fishers ist folgendes entgegenzuhalten:

Nahezu jedes ökonometrische Modell hat unter seinen vorherbestimmten Variablen echte exogene Variable, d. h. vorherbestimmte Variable, die keine verzögerten endogenen Variablen sind. Deren Zukunftswerte müssen vor einer Prognose der endogenen Variablen selbst erst prognostiziert werden. Nun wird in der ökonometrischen Fachwelt einhellig zugestanden, daß nur wenige der in Modellen als exogen unterstellten Variablen tatsächlich exogen sind, d. h. die endogenen Variablen beeinflussen, ohne selbst von diesen beeinflusst zu werden. Nichtsdestoweniger muß man bei Prognosen die Zukunftswerte dieser "pseudo"-exogenen Variablen als bekannt voraussetzen. Insofern unterscheidet sich diese Situation und die hier übliche Vor-

---

<sup>1</sup> Fisher, F. M., "The Place of Least Squares in Econometrics: Comment", *Econometrica* 30, 1962, 565-567.

gehensweise in keiner Weise von der, die Fisher bei Waugh kritisiert. Hier wie dort findet der Prognoseprozeß in zwei Stufen statt, nur werden bei Verwendung simultaner Systeme mehrere endogene Variable gleichzeitig prognostiziert.

Aus der Waugh'schen Argumentation wird ferner nicht klar, ob simultane Gleichungsmodelle als ungeeignet zur Beschreibung der Wirklichkeit betrachtet oder lediglich aufwendige Verfahren zur Schätzung der Parameter einer gegebenen Gleichung eines gegebenen Modells abgelehnt werden. Um in diesem wichtigen Punkt die in der vorliegenden Arbeit verfochtene Ansicht klarzustellen: Hier wird nicht der "simultaneous-equations-approach" als solcher angegriffen. Es soll lediglich die Berechtigung des Aufwandes angezweifelt werden, der bei dem mehr handwerklichen Teil der Modellierung der Wirklichkeit, d.h. der numerischen Bestimmung der Parameter des Modells, getrieben wird.

Abschließend ein Wort zu dem auf dem sogenannten "proximity theorem" beruhenden Rechtfertigungsversuch von Herman Wold.<sup>1</sup> Dieser Satz, angewandt auf das Modell (2.3), sagt aus, daß eine von <sup>2</sup> unabhängige Konstante  $c$  existiert mit

$$(2.10) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E(|\hat{a}_{OLS} - a|) \leq c \epsilon^2.$$

Die asymptotische Verzerrung von OLS (und damit wegen Verschwindens der Varianz auch die Inkonsistenz) geht mit kleiner werdender Varianz der Störgrößen somit ebenfalls gegen 0. In diesem Sinne ist OLS in gewissen Fällen also fast konsistent, wodurch ein Haupteinwand gegen den Gebrauch dieser Methode in simultanen Gleichungssystemen hinfällig wird.

---

<sup>1</sup> Dieser Satz wurde von Wold in mehreren Schriften formuliert. Siehe etwa Wold, H. und Mosbaek, E., a.a.O., S.122. Dort ist auch eine für allgemeinere Systeme als (2.3) zutreffende Fassung zu finden.

### 3. Simultane Gleichungssysteme

#### a) Modell und Identifikation

Ein lineares simultanes Gleichungssystem läßt sich allgemein schreiben als<sup>1</sup>

$$(3.1) \quad \sum_{k=1}^g \gamma_{ik} y_{kt} = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} x_{jt} + u_{it}, \quad i=1, \dots, g, \quad t=1, \dots, T.$$

Dabei steht  $y_{kt}$  für den Wert der k-ten endogenen,  $x_{jt}$  für den Wert der j-ten vorherbestimmten (exogenen oder verzögert endogenen) Variablen zum Zeitpunkt t. g ist die Zahl der Gleichungen und endogenen, m die Zahl der vorherbestimmten Variablen.

Die Größen  $u_{it}$ , nach Wold ein "stumbling block in the transition from deterministic to stochastic models", werden in der Literatur unter verschiedenen Namen geführt. Zum Teil drücken sich darin wohl auch abweichende Auffassungen über das Wesen dieser Größen aus. So sind etwa im deutschsprachigen Schrifttum die Bezeichnungen "Störgrößen" und "latente Variable" zu finden. Mit der letzten Bezeichnung ist wohl implizit eine Interpretation der  $u_{it}$  als Ausfluß der Wirkungen aller in die betreffende Gleichung nicht aufgenommenen erklärenden Variablen verbunden. Jedoch ist das Fehlen einer exakten linearen Beziehung zwischen den Variablen in (3.1) auch anders zu begründen, etwa durch Meßfehler. Im folgenden wird daher einheitlich von Störgrößen gesprochen. Mit "Restgrößen" sind dagegen die geschätzten Werte dieser Variablen gemeint.

Unabhängig von verschiedenen Interpretationen ist das mathematische Modell dieses Restes jeweils gleich: Die  $u_{it}$  werden als Zufallsvariable

<sup>1</sup> Die Schreibweise folgt Schneeweiß, H., Ökonometrie, 2. Aufl. Würzburg 1974.

<sup>2</sup> Siehe Wold, H. O., "Nonexperimental Statistical Analysis from the General Point of View of Scientific Method", Bulletin of the International Statistical Institute 42, 1967, 391-425, S. 404.

mit Erwartungswert 0 aufgefaßt. In der vorliegenden Arbeit wird zusätzlich gemeinsame Normalverteilung und serielle Unkorreliertheit aller  $u_{it}$  vorausgesetzt. Dagegen wird Korrelation zwischen Störgrößen für gegebenes  $t$  zugelassen. Die Kovarianzmatrix der  $u_{it}$  bei gegebenem  $t$  wird mit  $\sum_u$  bezeichnet und als unabhängig von  $t$  und von vollem Rang angenommen.<sup>1</sup>

In Matrixschreibweise lautet (3.1) wie folgt:<sup>2</sup>

$$(3.2) \quad Y\Gamma = XB + U$$

Dabei ist  $Y$  die  $T \times g$ -Matrix der Beobachtungswerte der endogenen und  $X$  die  $T \times m$ -Matrix der Beobachtungswerte der vorherbestimmten Variablen. Die Matrizen  $\Gamma$ ,  $B$  und  $\sum_u$  heißen Matrizen der Strukturkoeffizienten oder kurz Strukturmatrizen. Die Schätzung dieser unbekannten Konstanten ist eine der Hauptaufgaben bei Vorliegen eines Modells (3.1). Ein numerisch spezifiziertes Tripel  $(\Gamma, B, \sum_u)$  wird im folgenden Struktur genannt. Ein Modell kann damit aufgefaßt werden als Menge aller Strukturen, die den weiter unten eingeführten Restriktionen genügen.

Ist die  $g \times g$ -Matrix  $\Gamma$  invertierbar, so heißt die Struktur vollständig, und es läßt sich die reduzierte Form von (3.2) betrachten:

$$(3.3) \quad Y = X\Pi + V \quad \text{mit} \quad \Pi = B\Gamma^{-1}, \quad V = U\Gamma^{-1}$$

---

<sup>1</sup> Enthält das System (3.1) Definitionsgleichungen oder Gleichgewichtsbedingungen, so werden die entsprechenden Störgrößen als entartete Zufallsvariable mit einzig möglichem Wert 0 aufgefaßt und nur die Kovarianzmatrix der nicht entarteten Störgrößen wird als regulär vorausgesetzt.

<sup>2</sup> Dabei sind die Koeffizienten der  $i$ -ten Gleichung durch die  $i$ -ten Spalten von  $\Gamma$  und  $B$  gegeben. Um die auch sonst in der Ökonometrie übliche Indizierung von Beobachtungswerten beizubehalten, wurden daher in (3.1) Zeilen- und Spaltenindices aller Matrizen vertauscht.

Vor einer Schätzung von Strukturmatrizen muß das Identifikationsproblem, d.h. die Frage der prinzipiellen Möglichkeit einer solchen Schätzung, geklärt werden. Offenbar ist aber nun eine sinnvolle Schätzung einer Struktur immer dann unmöglich, wenn verschiedene a priori zugelassene Strukturen die gleiche Verteilung der Zufallsmatrix  $Y$  in (3.3) erzeugen.

Bei normalverteilten  $u_{it}$  und gegebenem  $X$  ist die Verteilung von  $Y$  durch  $\Pi$  und die Kovarianzmatrix  $\sum_v$  der Störgrößen  $v_{it}$  der reduzierten Form eindeutig festgelegt.<sup>1</sup> Genau dann induzieren aber zwei Strukturen  $(\Gamma, B, \sum_u)$  und  $(\Gamma^*, B^*, \sum_u^*)$  identische  $\Pi$  und  $\sum_v$ , wenn eine reguläre Transformation  $T$  existiert mit

$$(3.4) \quad \Gamma^* = \Gamma T, \quad B^* = B T, \quad \sum_u^* = T' \sum_u T$$

Zum Beweis sei zunächst eine derartige Transformation  $T$  gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Pi^* &= B^* (\Gamma^*)^{-1} = B T (\Gamma T)^{-1} = B \Gamma^{-1} = \Pi \\ \sum_v^* &= (\Gamma^*)^{-1} \sum_u^* (\Gamma^*)^{-1} = (\Gamma')^{-1} (T')^{-1} T' \sum_u T T^{-1} \Gamma^{-1} = \sum_v \end{aligned}$$

Ist andererseits  $\Pi^* = \Pi$  und  $\sum_v^* = \sum_v$ , so rechnet man leicht nach, daß die zugehörigen Strukturen durch  $T := \Gamma^{-1} \Gamma^*$  ineinander überführbar sind.

Ein bestimmter Strukturparameter  $a$  einer gegebenen Struktur (d.h. eine bestimmte Komponente einer der Matrizen  $\Gamma$ ,  $B$  oder  $\sum_u$ ) heißt nun identifizierbar, wenn  $a$  unter allen zugelassenen (S. 14) Transformationen  $T$  invariant bleibt. Eine Gleichung ist identifizierbar, wenn alle ihre Parameter identifizierbar sind. Eine Struktur ist identifizierbar, wenn alle Gleichungen und  $\sum_u$  identifizierbar sind. In diesem Fall ist die Einheitsmatrix die einzige Transformation, die (3.4) erfüllt. Ein Modell ist identifizierbar, wenn alle seine Strukturen identifizierbar sind.

<sup>1</sup> Sollte  $X$  endogene lag-Variable enthalten, muß diese Aussage wie folgt modifiziert werden:

Bei festem  $t$  ist die bedingte Verteilung der  $y_{it}$  gegeben die  $x_{jt}$  ( $i=1, \dots, g$ ;  $j=1, \dots, m$ ) durch  $\Pi$  und  $\sum_v$  eindeutig festgelegt.

Identifizierbarkeit von Strukturen ist in aller Regel dadurch gewährleistet, daß die Menge aller a priori zugelassenen Strukturen durch Normierungsvorschriften, Nullrestriktionen sowie weitere a priori Informationen erheblich eingeschränkt wird. Damit wird es in den meisten Fällen unmöglich, eine reguläre, von der Identität verschiedene Transformation  $T$  zu finden, so daß sowohl  $(\Gamma, B, \Sigma_u)$  als auch  $(\Gamma T, BT, T\Sigma_u T)$  sämtliche Restriktionen erfüllen. Die Nachprüfung dieses Sachverhalts wird in konkreten Fällen jedoch große Schwierigkeiten bereiten. Glücklicherweise gibt es Faustregeln, die in gewissen Situationen eine unkomplizierte Entscheidung der Identifizierbarkeitsfrage erlauben.

Liegen für eine bestimmte Gleichung nur die Normierungsvorschrift und Nullrestriktionen vor und werden bezüglich  $\Sigma_u$  keine Einschränkungen gemacht, so ist notwendige Bedingung für die Identifizierbarkeit dieser Gleichung, daß gilt:

$$(3.5) \quad m - m^* \geq g^* - 1$$

Dabei ist  $m^*$  die Anzahl der vorherbestimmten,  $g^*$  die Anzahl der endogenen Variablen in der Gleichung.

Ist (3.5) nicht erfüllt, heißt die Gleichung unteridentifiziert. Gilt das Gleichheitszeichen, ist die Gleichung genau identifiziert. Gilt das Größerzeichen, ist die Gleichung überidentifiziert.

Für eine tiefergreifende Diskussion des Identifikationsproblems verweisen wir auf die Fachliteratur.<sup>1</sup> Hier nur soviel: Auch bei Nichterfüllung von (3.5) kann ein System durch Restriktionen bezüglich  $\Sigma_u$  identifizierbar gemacht werden. Ein Beispiel dafür haben wir im Modell (2.1), (2.2) kennengelernt. Ein weiterer wichtiger Fall sind rekursive Systeme, die wegen der bezüglich  $\Sigma_u$  vorausgesetzten Diagonalgestalt immer identifizierbar sind.

---

<sup>1</sup> Siehe etwa Fisher, F. M., The Identification Problem in Econometrics, New York 1966.

Als nächstes sollen in Kapitel 3b) Verfahren zur Schätzung der Strukturmatrizen diskutiert werden. Zuvor noch einige abschließende Bemerkungen zur in der Literatur vorgebrachten Kritik am "simultaneous equations approach":

So wurde zuweilen die im System (3.1) implizit enthaltene Hypothese der Linearität wirtschaftlicher Beziehungen kritisiert. Bekanntlich gibt es makroökonomische Verhaltensgleichungen -etwa die Liquiditätspräferenzfunktion Keynes'scher Prägung mit liquidity trap- die eine eindeutig nichtlineare Beziehung zwischen den Variablen beschreiben.

Hier kann man zur Verteidigung anführen, daß Funktionen sich oft mit einer für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit durch lineare Gleichungen approximieren lassen. Jedoch ist dies nur eine "lokale" Eigenschaft. Daher kann sie nur bei einem relativ kleinen Schwankungsbereich der erklärenden Variablen als Begründung dienen. Eher sollte man auch die Wahl der funktionalen Form einer ökonometrischen Beziehung den Daten überlassen, wie dies von Zarembka für Ein-Gleichungsmodelle versucht worden ist.<sup>1</sup> Ähnliche Überlegungen haben Tintner und Kadekodi für simultane Gleichungssysteme angestellt.<sup>2</sup> Es bleibt aber zu überlegen, ob eine solche Vorgehensweise bei den in ökonometrischen Anwendungen üblichen kleinen Stichproben wirklich zu einer besseren Anpassung der Modelle an die ökonomische Realität führt (Siehe S. 17). Ohnehin scheinen derartige Praktiken in empirischen Arbeiten derzeit noch unüblich zu sein. Vielmehr erscheint die Vermutung gerechtfertigt, daß vielfach die im Vergleich zu nichtlinearen Systemen relativ einfache Handhabung von Schätz- und Prognose-techniken als uneingestandene Rechtfertigung der Verwendung linearer Modelle dient.

---

<sup>1</sup> Zarembka, P., "Functional Form in the Demand for Money", JASA 63, 1968, 502-511.

<sup>2</sup> Tintner, G. und Kadekodi, G., "A Note on the Use of Differences and Transformations in the Estimation of Economic Relations", Sankhya 35, Serie B, 1973, 268-277.

Weiterhin hat die mit der Schätzung eines wie in (3.1) und (3.2) spezifizierten Modells implizit einhergehende Annahme der Strukturkonstanz in den Perioden  $1, \dots, T$  gerade in jüngster Zeit erhebliche Kritik hervorgerufen. So schreibt etwa Muellbauer: "Considerable disenchantment has been expressed in recent years about the value of macroeconometric models. A frequently given reason why macroeconomic models are of limited value in predicting and understanding macroeconomic behaviour is that the real world is continually changing in structure".<sup>1</sup>

Die Annahme stochastischer Strukturkoeffizienten ist eine Möglichkeit, diesem Vorwurf zu begegnen. Erfolgversprechender erscheint jedoch die Aufgabe einer weiteren, in vielen Anwendungen des Modells (3.2) enthaltenen Hypothese: Die Annahme, alle endogenen Variablen befinden sich zu jedem Zeitpunkt  $t$  im Gleichgewicht. Unterteilt man etwa die stochastischen Gleichungen eines Modells in institutionelle und technische Gleichungen (wie etwa Steuer- und Produktionsfunktionen) sowie Verhaltensgleichungen, so beinhaltet das die Annahme, daß die in letzteren Relationen zum Ausdruck kommenden Pläne und Wünsche der Wirtschaftssubjekte in jeder Periode in Erfüllung gehen. "For example, in a model of two equations explaining the price and output of a commodity through the interaction of demand and supply, it is assumed that the desired demand always equals the desired supply".<sup>2</sup> Insbesondere Fair und Jaffee haben diese Problematik ins Rampenlicht gerückt.<sup>3</sup> Die mit der "econometrics of disequilibrium" verbundene Diskussion führt jedoch weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

---

<sup>1</sup> Muellbauer, J., "Macrotheory vs. Macroeconometrics: The Treatment of "Disequilibrium" in Macromodels", Discussion Paper No. 59, Birkbeck College, London 1978, S. 1.

<sup>2</sup> Chow, G. C., "A Reformulation of Simultaneous Equations Models for Markets in Disequilibrium", Research Memorandum No. 213, Princeton University 1977, S. 1.

<sup>3</sup> Fair, R. C. und Jaffee, D., "Methods of Estimation for Markets in Disequilibrium", *Econometrica* 40, 1972, 497-514.

Verfehlt erscheint dagegen der vor allem von Klein propagierte Ausweg einer vermehrten Ausweitung bestehender Modelle. So spricht er etwa davon, das ohnehin schon umfangreiche Brookings-Modell auf über 1 000 Gleichungen zu vergrößern.<sup>1</sup> Hier liegt eine Situation vor, die sich sehr gut mit dem phototechnischen Problem einer möglichst detailgetreuen Abbildung eines gegebenen Motivs -entsprechend einer möglichst detaillierten Erfassung einer gegebenen ökonomischen Realität- vergleichen läßt. Ist die Belichtungszeit vorgegeben -in Analogie zu dem in der Ökonometrie meistens exogen vorgegebenen Beobachtungszeitraum- und steht ein fein- und ein grobkörniger Film zur Auswahl -entsprechend großen und kleinen=groben Modellen in der Ökonometrie-, so wird nicht in jedem Fall der feinkörnige Film die besseren Bilder liefern, denn in der Regel benötigen derartige Materialien zum Erreichen einer bestimmten Wiedergabequalität eine verglichen zu grobkörnigen Filmen längere Belichtungszeit.

Auf ökonometrische Gleichungssysteme übertragen verhindert dieser "Unterbelichtungseffekt" eine zuverlässige Schätzung der mit einer Verfeinerung solcher Systeme vermehrt auftretenden unbekannten Strukturparameter. Im allgemeinen wird zwar eine -trägerisch- gute Anpassung an historische Daten erreicht, aber spätestens bei Prognosen zeigt sich der unsichere Grund, auf dem solche Spezifizierungen stehen. Damit ist nicht ausgeschlossen, daß bei hinreichend langen Beobachtungsreihen mit großen Modellen eine bessere Abbildung der Realität erreicht wird als mit kleinen.

Abschließend noch ein Wort zu den Angriffen, die Wold gegen den simultaneous-equations-approach gerichtet hat.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Klein, L. R., "Forecasting and Policy Evaluation Using Large Scale Econometric Models: The State of the Art", in: Intriligator, M. D. (Hg), *Frontiers of Quantitative Economics*, amsterdam 1971, S. 157.

<sup>2</sup> Kritische Auseinandersetzung mit der Logik des simultaneous-equations-approach ist ein immer wiederkehrendes Thema in den Schriften Wolds. Den Anfang macht hier wohl Wold, H., "Causality and Econometrics", *Econometrica* 22, 1954, 162-174.

Nach Wold können Kausalbeziehungen zwischen ökonomischen Variablen nur in einer Richtung bestehen. Damit sind simultane Gleichungssysteme unzulässig, deren Charakteristikum ja gerade in der gegenseitigen Abhängigkeit der endogenen Variablen besteht. Nur der Spezialfall rekursiver Systeme wird als geeignetes Mittel zur Beschreibung der Realität anerkannt.

Hier ist zu bemerken, daß die Wold'sche Vorgehensweise bei ausreichender zeitlicher Disaggregation ökonomischer Stromgrößen möglicherweise zu rechtfertigen ist. Durch Aggregation in der Zeit sind aber wechselseitige Interdependenzen unausweichlich, wie etwa Schneeweiß an einem einfachen Beispiel zeigt.<sup>1</sup>

Damit wollen wir die Diskussion des Modellansatzes als solchem verlassen. Die hier angesprochenen Probleme kennzeichnen jedoch nach unserer Ansicht diejenigen Gebiete, auf denen das Hauptaugenmerk der ökonometrischen Forschung liegen sollte, statt auf der endlosen Diskussion immer neuer Schätzverfahren, denen wir uns nun zuwenden.

---

<sup>1</sup> Schneeweiß, H., a. a. O., S. 258.

## b) Definition der Schätzverfahren

Wir betrachten im folgenden eine feste Gleichung, und zwar ohne Beschränkung der Allgemeinheit die erste, des Systems (3.1). Diese läßt sich unter Weglassung der a priori nullgesetzten Parameter wie folgt in Matrixschreibweise formulieren:

$$(3.6) \quad Y_1 \bar{Y}_1 = X_1 \bar{\beta}_1 + u_1$$

Dabei ist  $Y_1$  eine  $T \times g^*$ ,  $X_1$  eine  $T \times m^*$ -Matrix,  $\bar{Y}_1$  ein  $g^*$ -dimensionaler,  $\bar{\beta}_1$  ein  $m^*$ -dimensionaler Spaltenvektor.  $g^*$  ist die Anzahl der endogenen,  $m^*$  die Anzahl der vorherbestimmten Variablen in der Gleichung.

Setzt man die erste Komponente von  $\bar{Y}_1$  gleich 1, so läßt sich (3.6) auch so schreiben:

$$(3.7) \quad y_{1t} = -\gamma_2 y_{2t} - \dots - \gamma_{g^*} y_{g^*t} + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_{m^*} x_{m^*t} + u_{1t}; \quad t=1, \dots, T.$$

In Matrixschreibweise:

$$(3.8) \quad y_1 = Y_* \gamma^* + X_1 \bar{\beta}_1 + u_1 = Z_1 \delta_1 + u_1$$

mit

$$(3.9) \quad Z_1 = (Y_*, X_1), \quad \gamma^* = \begin{bmatrix} -\gamma_2 \\ \vdots \\ -\gamma_{g^*} \end{bmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{bmatrix} \gamma^* \\ \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

Wir setzen im folgenden immer  $m - m^* \geq g^* - 1$  voraus. Andernfalls sind die Rechenvorschriften zur Schätzwertberechnung für viele der anschließend diskutierten Verfahren nicht anwendbar. Immerhin wurde aber in Kapitel 2 gezeigt, daß auch bei Verletzung dieser Bedingung eine konsistente Schätzung der Strukturparameter möglich ist. Um die Existenz der OLS-Schätzung der reduzierten Form zu sichern, wird weiterhin voller Rang von  $X$  angenommen. Insbesondere erfordert das  $T \geq m$ .

Ferner wird, sofern nicht schon durch obige Bedingungen gewährleistet, eindeutige Lösbarkeit aller weiter unten vorkommenden Gleichungssysteme vorausgesetzt.

Ehe wir nun zu den eigentlichen Strukturschätzverfahren kommen, ein Wort zur OLS-Schätzung der reduzierten Form (3.3). (Im folgenden mit DLS für "Direct Least Squares" abgekürzt).

Bekanntlich ist die DLS-Schätzung  $\hat{\Pi}$  für  $\Pi$  gegeben durch

$$(3.10) \quad \hat{\Pi} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Die "reduzierten" Werte  $\hat{Y}$  der endogenen Variablen erhält man dann durch

$$(3.11) \quad \hat{Y} = X\hat{\Pi}$$

und die reduzierten Werte von  $Y_*$  durch Weglassen derjenigen Spalten von  $\Pi$ , die zu den Variablen mit a priori nullgesetzten Koeffizienten gehören:

$$(3.12) \quad \hat{Y}_* = X\Pi_*$$

Ferner wird im folgenden noch die Matrix  $\hat{V}$  der Restgrößen der reduzierten Form gebraucht, die definiert ist durch

$$(3.13) \quad \hat{V} = Y - \hat{Y}$$

und analog

$$(3.14) \quad \hat{V}_* = Y_* - \hat{Y}_*$$

Weiterhin wird für den Rest des Kapitels von der Schneeweiß'schen Schreibweise teilweise abgegangen und die folgende weniger überladene Symbolik verwendet:

Für  $Y_*$ ,  $\hat{Y}_*$ ,  $\hat{V}_*$ ,  $\hat{\Pi}_*$ ,  $\gamma^*$  schreiben wir in Zukunft nur noch  $Y$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{\Pi}$ , und  $\gamma$ . Die Symbole  $Y$ ,  $\hat{Y}$  und  $\hat{V}$ , die bislang eine andere Bedeutung hatten, werden im weiteren nur noch in dem so definierten Sinn verwendet, so daß Mißverständnisse ausgeschlossen sind. Da wir im folgenden weiterhin immer ein und dieselbe Gleichung betrachten, kann auf eine Indizierung der Symbole zur Kenntlichmachung der zugrundeliegenden Gleichung verzichtet werden. Wir schreiben daher von nun an für  $y_1$ ,  $Z_1$ ,  $u_1$ ,  $\bar{\beta}_1$ ,  $\delta_1$  nur noch  $y$ ,  $Z$ ,  $u$ ,  $\beta$  und  $\delta$ .

Wir hoffen, durch diese Vereinbarungen die folgenden Formeln übersichtlich und trotzdem eindeutig zu halten.

Nach diesen Vorbemerkungen kann man für (3.8) einfacher schreiben

$$(3.15) \quad y = Z\delta + u$$

und erhält als Formel für die OLS-Schätzung von  $\delta$  den bekannten Ausdruck

$$(3.16) \quad \hat{\delta}_{OLS} = (Z'Z)^{-1}Z'y$$

oder ausführlicher

$$(3.17) \quad \hat{\delta}_{OLS} = [(Y, X_1)'(Y, X_1)]^{-1}(Y, X_1)'y$$

Wichtigster Konkurrent für OLS ist wohl das Verfahren TSLS (für "Two-Stage-Least-Squares") von Henri Theil.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Zum ersten Mal vorgestellt in Theil, H., "Repeated Least Squares Applied to Complete Equation Systems", Unveröffentlichtes Manuskript des Central Planning Bureau, Den Haag 1952.

Die Logik dieses Verfahrens kann man etwa wie folgt darstellen:

Da die Inkonsistenz von OLS von der Existenz der Teilmatrix  $Y$  in  $Z$  herrührt, deren Komponenten im allgemeinen mit den Störgrößen korreliert sind, kann man diese Korrelation mildern und asymptotisch ganz eliminieren, wenn man  $Y$  durch die Matrix  $\hat{Y}$  der reduzierten Werte ersetzt.

Die zu (3.17) analoge Formel zur Berechnung der TSLS-Schätzwerte für  $\delta$  lautet damit:

$$(3.18) \quad \hat{\delta}_{\text{TSLS}} = [(\hat{Y}, X_1)'(\hat{Y}, X_1)]^{-1} (\hat{Y}, X_1)' y$$

Theil selbst hatte ursprünglich eine andere Motivation für seinen Vorschlag gewählt:<sup>1</sup>

Prämultipliziert man beide Seiten von (3.15) mit  $X'$ ,

$$(3.19) \quad X'y = X'Z\delta + X'u$$

so hat man mit  $y^+ := X'y$ ,  $Z^+ := X'Z$ ,  $u^+ := X'u$

$$(3.20) \quad y^+ = Z^+\delta + u^+,$$

wobei für die Kovarianzmatrix  $V^+$  von  $u^+$  gilt:

$$(3.21) \quad V^+ = \delta^2 X'X$$

Wendet man nun auf (3.20) die verallgemeinerte Methode der kleinsten Quadrate an<sup>2</sup>, erhält man nach einigen Umformulierungen gerade die Formel (3.18) zur Berechnung von  $\hat{\delta}_{\text{TSLS}}$ .

Ein letzter Vorschlag zur Begründung von TSLS stammt von Klein.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Siehe Theil, H., "Repeated Least Squares ...", a.a.O.

<sup>2</sup> Diese Methode ist optimal bei korrelierten Störgrößen im klassischen Regressionsmodell. Näheres im Anhang.

<sup>3</sup> Klein, L. R., "On the Interpretation of Theil's Method of Estimating Economic Relationships", *Metroeconomica* 7, 1955, 147-153.

Klein weist nach, daß man TSLS als Spezialfall der Methode der Hilfsvariablen auffassen kann (im folgenden mit HV abgekürzt)<sup>1</sup>.

Das Prinzip dieses Verfahrens, übertragen auf den Fall simultaner Gleichungssysteme, läßt sich etwa so darstellen:

Prämultipliziert man (3.15) auf beiden Seiten mit einer  $(m^* + g^* - 1) \times T$ -Matrix H, von der man exakt oder näherungsweise weiß, daß  $Hu = 0$ , so erhält man die folgenden Bestimmungsgleichungen für  $\delta$  durch Nullsetzen von  $Hu$ :<sup>2</sup>

$$(3.22) \quad Hy = HZ\delta$$

Durch geeignete Wahl der Zeilen von H kann man erreichen, daß HZ regulär und damit das Gleichungssystem nach  $\delta$  auflösbar ist.<sup>3</sup>

Üblicherweise nimmt man als Zeilen von H Zeitreihen von Beobachtungswerten der vorherbestimmten Variablen des Modells. Da deren Anzahl gerade m beträgt, hat man für  $m < m^* + g^* - 1$  (also den Fall einer unteridentifizierten Gleichung):

$\delta$  wird durch (3.22) nicht eindeutig bestimmt, d.h. HV ist nicht anwendbar.

Für genau identifizierte Gleichungen erhält man genausoviele Bestimmungsgleichungen wie Unbekannte und für überidentifizierte Gleichungen ist  $\delta$  überbestimmt. Man hat also unter den Bestimmungsgleichungen eine mehr oder weniger willkürliche Auswahl zu treffen, weshalb HV als Schätzverfahren in dieser Form weitgehend abgelehnt wird.

Klein schlägt nun folgende Wahl der Hilfsvariablen vor:

Zunächst die in der Gleichung selbst vorkommenden vorherbestimmten Variablen und zusätzlich die reduzierten Werte der rechtsseitigen endogenen Variablen. Durch einige Umformungen macht man sich klar,

---

<sup>1</sup> Allgemeiner kann man beliebige k-Klasse Schätzungen als HV-Schätzungen auffassen. Siehe etwa Stöwe, H., Ökonometrie, Meisenheim 1977, S. 395-397.

<sup>2</sup> Vielfach als System der Normalgleichungen bezeichnet

<sup>3</sup> Bei Stöwe, H., a. a. O., S. 372 findet sich eine nützliche Zusammenstellung dabei zu beachtender Gesichtspunkte.

daß diese Vorschrift gerade auf die Bestimmungsgleichung (3.18) hinausläuft.

Wie man sich leicht durch Betrachtung von (3.18) klarmacht, läßt sich  $\hat{\delta}_{\text{TSLs}}$  nur für  $m \geq m^* + g^* - 1$  berechnen:

Die Matrix  $(\hat{Y}, X_1)$  hat als Spalten Linearkombinationen der Spalten von  $X$ . Daraus folgt, daß für  $m < m^* + g^* - 1$  die Spalten von  $(\hat{Y}, X_1)$  linear abhängig sein müssen, da die Anzahl der Spalten von  $X$  gerade  $m$  und die Anzahl der Spalten von  $(\hat{Y}, X_1)$  gerade  $m^* + g^* - 1$  beträgt. Damit ist aber in (3.18) die Matrix in eckigen Klammern nicht mehr invertierbar, d. h.  $\hat{\delta}_{\text{TSLs}}$  läßt sich nicht berechnen.

Für  $m = m^* + g^* - 1$  stimmt TSLs mit der indirekten Methode der kleinsten Quadrate überein (im folgenden ILS für "Indirect Least Squares" genannt). ILS schließt von  $\hat{\Pi}$  auf  $\Gamma$  und  $B$  zurück. Für eine gegebene Gleichung ist das aber nur für  $m = m^* + g^* - 1$  eindeutig möglich.<sup>1</sup> In diesem Fall erhält man zu (3.22) äquivalente Bestimmungsgleichungen.

OLS und TSLs sind Elemente der sogenannten k-Klasse:

Schreibt man etwa die Bestimmungsgleichung (3.18) für  $\hat{\delta}_{\text{TSLs}}$  in der folgenden Form:

$$(3.23) \quad (\hat{Y}, X_1)' (\hat{Y}, X_1) \hat{\delta}_{\text{TSLs}} = (\hat{Y}, X_1)' y$$

und benutzt  $\hat{Y} = Y - \hat{V}$ , so erhält man für (3.23) in ausführlicher Schreibweise:

$$(3.24) \quad \begin{bmatrix} Y'Y - Y'\hat{V} - \hat{V}'Y + \hat{V}'\hat{V} & Y'X_1 - \hat{V}'X_1 \\ X_1'Y - X_1'\hat{V} & X_1'X_1 \end{bmatrix} \hat{\delta}_{\text{TSLs}} = \begin{bmatrix} Y' - \hat{V}' \\ X_1' \end{bmatrix} y$$

Dieser Ausdruck reduziert sich aber unter Benutzung von

$$(3.25) \quad X_1' \hat{V} = \hat{V}' X_1 = \hat{V}' \hat{V} = \hat{V}' \hat{Y} = 0$$

<sup>1</sup> Siehe aber Khazzoom, J. D., "An Indirect Least Squares Estimator for Overidentified Equations", *Econometrica* 44, 1976, 741-750.

und daraus folgend

$$(3.26) \quad Y' \hat{V} = \hat{V}' Y = \hat{V}' \hat{V}$$

auf

$$(3.27) \quad \begin{bmatrix} Y'Y - \hat{V}'\hat{V} & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix} \hat{\delta}_{\text{TSLs}} = \begin{bmatrix} Y' - \hat{V}' \\ X_1' \end{bmatrix} y.$$

Man hat es also mit einem Spezialfall der folgenden Bestimmungsgleichungen zu tun:

$$(3.28) \quad \begin{bmatrix} Y'Y - k\hat{V}'\hat{V} & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix} \hat{\delta}_k = \begin{bmatrix} Y' - k\hat{V}' \\ X_1' \end{bmatrix} y.$$

Für TSLs gilt gerade  $k=1$ . Durch Vergleich von (3.28) und (3.17) macht man sich leicht klar, daß man die OLS-Schätzungen für  $k=0$  erhält.

Generell werden Schätzverfahren dann zur  $k$ -Klasse gezählt, wenn die jeweiligen Schätzwerte sich als Lösungen von Gleichungssystemen wie (3.28) gewinnen lassen.

Durch Verallgemeinerung von OLS und TSLs in eine andere Richtung erhält man die Verfahren der sogenannten  $h$ -Klasse:

OLS und TSLs erhielt man durch Einsetzen von  $Y - k\hat{V}$  für  $Y$  in (3.17) (OLS:  $k=0$ , TSLs:  $k=1$ ). Läßt man andere Werte von  $k$  zu, erhält man nicht, wie man zunächst vermuten könnte, das System (3.28), sondern:

$$(3.29) \quad \begin{bmatrix} Y'Y - (2k-k^2)\hat{V}'\hat{V} & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix} \hat{\delta}_h = \begin{bmatrix} Y' - k\hat{V}' \\ X_1' \end{bmatrix} y.$$

Zur Herleitung von (3.29) geht man analog wie beim Schritt von (3.24) nach (3.27) vor: Der zu (3.23) analoge Ausdruck wird ausmultipliziert, wobei man an Stelle von  $\hat{Y} = Y - \hat{V}$  den allgemeineren Ausdruck  $Y - k\hat{V}$  verwendet.

Theil setzt nun für  $k$  den Ausdruck  $1-h$ , so daß man statt (3.29) erhält:<sup>1</sup>

$$(3.30) \quad \begin{bmatrix} Y'Y - (1-h^2)\hat{V}'\hat{V} & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix} \hat{\delta}_h = \begin{bmatrix} Y' - (1-h)\hat{V}' \\ X_1' \end{bmatrix} y$$

Wie man sieht, ist der Fall  $h=1$  identisch mit dem Fall  $k=0$  und umgekehrt. Für sonstige Werte von  $h$  gilt:  $1-h^2 \neq 1-h$ , so daß OLS und TSLS die einzigen Elemente in der Durchschnittsmenge dieser beiden Klassen von Schätzverfahren sind. Beide Klassen sind jedoch ihrerseits in einer umfassenderen Klasse enthalten, den Verfahren der Doppel- $k$ -Klasse von Nagar.<sup>2</sup>

Deren Schätzwerte sind gegeben als Lösungen des Systems

$$(3.31) \quad \begin{bmatrix} Y'Y - k_1\hat{V}'\hat{V} & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix} \hat{\delta}_{k_1k_2} = \begin{bmatrix} Y' - k_2\hat{V}' \\ X_1' \end{bmatrix} y$$

Das neben TSLS wohl am weitesten verbreitete Verfahren der  $k$ -Klasse ist die Methode LIML (für "Limited-Information-Maximum-Likelihood") von Anderson und Rubin.<sup>3</sup>

LIML setzt im Gegensatz zu bisher behandelten Methoden normalverteilte Störgrößen voraus. Schätzwerte erhält man dann durch Maximierung

<sup>1</sup> Siehe etwa Theil, H., *Economic Forecasts and Policy*, 2. Auflage, Amsterdam 1961, S. 353. An welcher Stelle zum ersten Mal  $h$ -Klasse-Schätzungen erwähnt werden, konnte in der Literatur nicht ausgemacht werden

<sup>2</sup> Nagar, A. L., "Double  $k$ -Class Estimators of Parameters in Simultaneous Equations and Their Small Sample Properties", *International Economic Review* (im folgenden IER abgekürzt) 3, 1962, 168-188.

<sup>3</sup> Anderson, T. W. und Rubin, H., "Estimation of the Parameters of a single Equation in a Complete System of Stochastic Equations", *Annals of Mathematical Statistics* (im folgenden AMS abgekürzt) 20, 1949, 46-63.

der Likelihoodfunktion unter Nichtberücksichtigung von Restriktionen, die Parameter außerhalb der betrachteten Gleichung betreffen.

Auf weitere Details der Definition wollen wir hier nicht eingehen. Nur soviel: Die gleichen Schätzwerte wie durch das Likelihoodprinzip erhält man auch durch Anwendung des Prinzips des minimalen Varianzquotienten. Dazu sind im Gegensatz zu LIML keine Annahmen über die Verteilung der Störgrößen erforderlich. In beiden Fällen existiert jedoch kein zu (3.17) oder (3.18) analoger geschlossener Ausdruck zur Berechnung der Schätzwerte. Man ist vielmehr auf numerische Verfahren angewiesen. Insbesondere ergibt sich der jeweilige Wert von  $k$  als stochastische Lösung einer Determinantengleichung. Für  $m = m^* + g^* - 1$  hat diese Zufallsvariable identisch den Wert 1, so daß in diesem Fall einer genau identifizierten Gleichung LIML und TSLS (und damit auch ILS und HV) die gleichen Schätzwerte liefern.

Alle bisher besprochenen Methoden sind sogenannte "limited-Information"-Verfahren: Die Schätzwerte für die Koeffizienten einer Gleichung hängen nicht von a priori Restriktionen bezüglich Koeffizienten anderer Gleichungen ab. Negativer formuliert: Bei diesen Verfahren bleiben gewisse Informationen unberücksichtigt. Die "Full-Information"-Verfahren nützen dagegen auch diese Informationen aus. Am wichtigsten sind hier wohl die Verfahren FIML (für "Full-Information-Maximum-Likelihood"), 3SLS (für "Three-Stage-Least-Squares") und FP, das sogenannte Fixpunktverfahren von Herman Wold.

FIML-Schätzwerte erhält man durch Maximieren der Likelihoodfunktion unter Berücksichtigung aller Restriktionen. Analog zu LIML ist man dabei auf numerische Verfahren angewiesen.

3SLS läßt sich als Verallgemeinerung von TSLS auffassen bei Verwendung der ursprünglichen Theil'schen Herleitung:<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Siehe Zellner, A. und Theil, H., "Three-stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations", *Econometrica* 30, 1962, 54-78.

Die Matrix der endogenen Beobachtungsvektoren wird zu einem Vektor angeordnet und dann verfährt man analog wie in (3, 19) und (3, 20).<sup>1</sup>

Im Gegensatz zu FIML und 3SLS läßt sich das vor allem von Herman Wold und seinen Mitarbeitern propagierte Fixpunktverfahren nicht als Verallgemeinerung einer Limited-Information-Methode auffassen.<sup>2</sup>

Bei Vermeidung der bei Wold üblichen unnötig komplizierten Schreibweise läßt sich die Gewinnung von FP-Schätzwerten etwa durch den folgenden Iterationsprozeß beschreiben:

Jede Gleichung des Systems  $Y\Gamma = XB + U$  wird zunächst mit OLS geschätzt.<sup>3</sup> Seien  $\Gamma^{(1)}$  und  $B^{(1)}$  die so gewonnenen Strukturmatrizen,  $\Pi^{(1)}$  die zugehörige reduzierte Form und  $Y^{(1)} = X\Pi^{(1)}$  die Matrix der reduzierten Werte von Y.

Im nächsten Schritt wird auf jede Gleichung des neuen Systems  $Y^{(1)}\Gamma = XB + U^{(1)}$  wiederum OLS angewandt. Im allgemeinen werden die nun berechneten Strukturmatrizen  $\Gamma^{(2)}$  und  $B^{(2)}$  von  $\Gamma^{(1)}$  und  $B^{(1)}$  verschieden sein. Es wird also erneut die reduzierte Form und eine neue Matrix  $Y^{(2)}$  von reduzierten endogenen Beobachtungswerten bestimmt. Diese Prozedur wird fortgeführt, bis der geeignet definierte Abstand aufeinanderfolgender Matrizen eine vorgegebene Marke unterschreitet. Exakt sind die FP-Schätzwerte für  $\Gamma$  und B definiert als  $\Gamma^* := \lim \Gamma^{(n)}$  und  $B^* := \lim B^{(n)}$ .<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Für eine ausführliche Darstellung siehe etwa Schneeweiß, H., a. a. O., S. 306-309.

<sup>2</sup> Eine ausführliche Diskussion von FP-Methoden findet sich in Wold, H. und Mosbaek, E., a. a. O. Siehe vor allem S. 127-129 für eine breitere Darstellung der folgenden Ausführungen.

<sup>3</sup> Die Startwerte für Y können beliebig gewählt werden. Hier wurden die tatsächlich beobachteten Werte verwendet. Wesentlich ist dagegen, daß in jedem Schritt gerade mit OLS geschätzt wird.

<sup>4</sup> Es kann vorkommen, daß -entgegen Wold's ursprünglicher Behauptung- die betreffenden Folgen nicht konvergieren. In Wold und Mosbaek, a. a. O., S. 110 findet man eine Diskussion dieses Tatbestandes mit weiteren Literaturhinweisen.

Wesentlicher Vorteil von FP gegenüber z. B. TSLS und LIML ist die Tatsache, daß zur Schätzwertberechnung die Bedingung  $m \geq m^* + g^* - 1$  nicht erfüllt zu sein braucht. FP liefert also auch in solchen Fällen konsistente Schätzungen, in denen diese Bedingung verletzt, die betreffende Gleichung aber (etwa wegen Restriktionen bezüglich  $u_i$ ) trotzdem identifizierbar ist.<sup>1</sup>

Neben den hier vorgestellten Verfahren hat es in der Literatur eine wahre Flut weiterer Vorschläge gegeben. Diese Entwicklung können und wollen wir hier nicht in alle Verzweigungen verfolgen. Um dem Leser aber einen (keineswegs vollständigen) Überblick über alternative oder weiterführende Ansätze zu geben, seien die folgenden Versuche zumindest genannt:

Savin hat kürzlich eine Full-Information-Verallgemeinerung beliebiger k-Klasse-Schätzungen konstruiert.<sup>2</sup> Hausman hat das gleiche für HV getan.<sup>3</sup> Die Verallgemeinerung von ILS für überidentifizierte Gleichungen von Khazzoom hatten wir bereits erwähnt.<sup>4</sup> Zur Umgehung der komplizierten Rechnungen bei FIML haben Rothenberg und Leenders eine linearisierte Version vorgeschlagen (im folgenden LML für "Linearized-Maximum-Likelihood" genannt)<sup>5</sup>. Ein weiteres

---

<sup>1</sup> Für ein Beispiel siehe Kapitel 2.

<sup>2</sup> Savin, N. E., "Systems-k-class Estimators", *Econometrica* 41, 1973, 1125-1136.

<sup>3</sup> Hausman, J. A., "The Full-Information Instrumental Variables Estimation of Simultaneous Equation Systems", *Annals of Economic and Social Measurement* (im folgenden AESM abgekürzt) 3, 1974, 641-653.

<sup>4</sup> Khazzoom, J. D., a. a. O.

<sup>5</sup> Rothenberg T. J. und Leenders, C. T., "Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems", *Econometrica* 32, 1964, 57-76.

nicht direkt aus einer Limited-Information-Methode hervorgegangenes Verfahren ist die simultane Kleinst-Quadrate-Methode von Brown.<sup>1</sup> Auch das Wold'sche Fixpunktverfahren ist von Verallgemeinerungen nicht verschont geblieben.<sup>2</sup>

Viele der hier erwähnten Verfahren sind für den Fall autokorrelierter Störgrößen verallgemeinert worden.<sup>3</sup> Gewisse Verfahren können auch so modifiziert werden, daß sie stochastische a priori Restriktionen berücksichtigen.<sup>4</sup> Weitere Verallgemeinerungen sind möglich und auch durchgeführt worden in Richtung nichtlineare Systeme.<sup>5</sup> Full-Information-Verfahren lassen sich weiterhin auch anwenden auf Teilsysteme der betrachteten Gleichungen. Schließlich kann man das Prinzip der kleinsten Quadrate ganz aufgeben und etwa sogenannte minimum-distance-Verfahren konstruieren,<sup>6</sup> ganz zu schweigen von den Schätzungen, die man durch Anwendung Bayes'scher Schlußweisen erhält.<sup>7</sup>

---

<sup>1</sup> Siehe Brown, T. M., "Simultaneous Least Squares: A Distribution-Free Method of Equation System Structure Estimation", IER 1, 1960, 173-191.

<sup>2</sup> Siehe Agren, A., "Fractional Fix-Point Estimation" und Bodin, L., "Recursive Fix-Point Estimation", Kapitel 3.6 und 3.7 in Wold, H. und Mosbaek, E., a. a. O.

<sup>3</sup> Siehe etwa Amemiya, T., "The Nonlinear Two-Stage-Least-Squares Estimator", Journal of Econometrics (im folgenden J. of E. abgekürzt) 2, 1974, 105-110 für eine entsprechende Verallgemeinerung von TSLS.

<sup>4</sup> Siehe dazu Theil, H. und Goldberger, A. S., "On Pure and Mixed Statistical Estimation in Econometrics", IER 2, 1961, 65-78.

<sup>5</sup> Siehe etwa Hatanaka, M., "Several Efficient Two-Step Estimators for the Dynamic Simultaneous Equation Model with Autoregressive Disturbances", J. of E. 4, 1976, 189-204, Dhrymes, P. J., Berner, R. und Cummins, D., "A Comparison of Some Limited Information Estimators for Dynamic Simultaneous Equation Models with Autocorrelated Errors", Econometrica 42, 1974, 311-332, Fair, R. C., "The Estimation of Simultaneous Equation Models with Lagged Endogenous Variables and First Order Serially Correlated Errors", Econometrica 38, 1970, 507-515.

<sup>6</sup> Für ein Beispiel siehe Glahe, F. R. und Hunt, J. G., "The Small Sample Properties of Simultaneous Equation Least Absolute Estimators vis a vis Least Squares Estimators", Econometrica 38, 1970, 742-752.

<sup>7</sup> Das Standardwerk hierzu ist wohl Zellner, A., An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York 1971.

Damit wollen wir die Vorstellung von Schätzverfahren beschließen. Es wurden bei weitem nicht alle Verfahren bzw Varianten oben besprochener Methoden erwähnt und "It is likely that new methods for the formal part of estimation ... will continue to be proposed for many years", wie Wold zu dieser Entwicklung bemerkt,<sup>1</sup> Kein Band einer ökonomischen Fachzeitschrift erscheint ohne neue Vorschläge und ein Ende ist nicht abzusehen.

Wir bezweifeln, ob dieser immense Arbeitsaufwand sich lohnt. Gerechtfertigt wäre er möglicherweise, diente er der steten Annäherung an ein (möglicherweise unerreichbares, aber existierendes) Ideal, d.h. der Konstruktion eines gleichmäßig besten Schätzverfahrens, etwa in dem Sinn wie OLS im klassischen Regressionsmodell bestes lineares unverzerrtes Schätzverfahren ist.

Bei simultanen Gleichungssystemen kann man aber wegen der Größe des Parameterraumes nicht erwarten, daß ein solches Verfahren innerhalb einer wie immer sinnvoll definierten Klasse überhaupt existiert. Je nach Modell und Struktur wird vielmehr ein anderes Verfahren überlegen sein. "Given any specified method it is possible to construct or hypothesize a set of circumstances in which the method will be superior to other methods."<sup>2</sup> Davon hat man aber in praktischen Anwendungen nichts, denn "Unfortunately, a superior method for only special circumstances is of little value because the econometrician has no way of judging a priori if the special circumstances exist."<sup>3</sup> Simulationsstudien scheinen diese Hypothese zu bestätigen. So stellt z.B. Cragg als Ergebnis seiner Untersuchungen fest:

---

<sup>1</sup> Wold, H. und Mosbaek, E., a. a. O., S. 105.

<sup>2</sup> ebenda.

<sup>3</sup> ebenda. (Sperrschrift in beiden Zitaten von Wold).

Die weitreichenden Konsequenzen dieses Phänomens für Simulationsstudien sind bislang wenig beachtet worden. So kann der Erfinder einer neuen Methode die (scheinbare) Überlegenheit seines Verfahrens dadurch mit Simulationsstudien untermauern, daß er solange experimentiert, bis er Parameterkonstellationen findet, für die sein Verfahren in der Tat das beste ist.

"Sensitivity of the relative performance of the estimators to the parameter values chosen in the models and to the values of the exogenous variables is studied. It is found that the differences are not great and that they are sensitive to the parameters used,"<sup>1</sup>

Wir betrachten solche Ergebnisse als Bestätigung unserer Hypothese, daß es nicht die Konstruktion immer neuer Methoden ist, die die Ökonometrie als Wissenschaft weiterbringt. Im Gegenteil. Angesichts des nicht verebbenden Aufwands bei der Konstruktion immer neuer Verfahren erscheint es uns im Licht obiger Aussagen und der empirischen Ergebnisse aus Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit gerechtfertigt, von einer erheblichen Fehlallokation menschlicher Ressourcen zu sprechen.

---

<sup>1</sup> Cragg, J. G., "On the Relative Small Sample Properties of Several Structural Equations Estimators", *Econometrica* 35, 1967, 89-110.

### c) Eigenschaften der Schätzverfahren

In diesem Zusammenhang am bekanntesten, auch bei Nicht-Ökonometrikern, ist wohl die Tatsache, daß in simultanen Gleichungssystemen das Verfahren OLS zwei Eigenschaften nicht besitzt: Konsistenz und asymptotische Erwartungstreue.<sup>1</sup> Überhaupt bleibt festzustellen, daß von allen Verfahren vor allem asymptotische Eigenschaften bekannt sind.<sup>2</sup>

So kann man etwa für  $\text{plim } k = 1$  die Konsistenz der  $k$ -Klasse-Schätzungen zeigen sowie unter der schärferen Bedingung  $\text{plim } \sqrt{T}(k-1) = 0$  asymptotische Normalverteilung beweisen und die asymptotische Kovarianzmatrix herleiten. Diese ist dann gegeben durch

---

<sup>1</sup> Ein Demonstrationsbeispiel findet man in fast allen einführenden Lehrbüchern der Ökonometrie. Siehe z. B. Stöwe, H., a. a. O., S. 357-361 oder Schneeweiß, H., a. a. O., S. 273-274.

Ferner scheint hier ein klärendes Wort angebracht über die Beziehung der Begriffe "Konsistenz" und "asymptotische Erwartungstreue".

Man hat es hier mit überlappenden Begriffen zu tun. Weder folgt aus Konsistenz asymptotische Erwartungstreue noch aus asymptotischer Erwartungstreue Konsistenz. Die zweite Aussage ist so trivial, daß sich ein formaler Beweis erübrigt. Daß dagegen Konsistenz nicht notwendig asymptotische Erwartungstreue nach sich zieht, scheint gelegentlich übersehen zu werden. Das folgende Beispiel möge dieses Phänomen erläutern:

Sei  $z_n$  eine Zufallsvariable, die man als Schätzfunktion für einen Parameter mit wahren Wert 0 interpretiert.

Es gelte  $W(z_n=0) = (n-1)/n$ ,  $W(z_n=n) = 1/n$ .

Offenbar hat man nun:  $\text{plim } z_n = 0$ , aber  $\lim(Ez_n) = 1$ .

$z_n$  ist also konsistent, hat aber für alle  $n$  identisch den Erwartungswert 1.

(Dieses Ergebnis hängt nicht davon ab, daß wir hier wie in der Ökonometrie allgemein üblich Konsistenz im Sinn der schwachen Konvergenz von Zufallsvariablen interpretieren. Man macht sich leicht klar, daß obige Folge auch im starken Sinn gegen 0 konvergiert. Dagegen könnte das Phänomen bei verschwindender Varianz nicht auftreten. Da nun mit wachsenden Stichproben die Varianz fast aller ökonometrischen Schätzverfahren gegen 0 geht, folgt in allen praktisch wichtigen Fällen in der Tat aus Konsistenz auch asymptotische Erwartungstreue.)

<sup>2</sup> Zu deren Ableitung müssen außer bisher getroffenen einige zusätzliche Annahmen gemacht werden. Ausführliche Erläuterungen dazu findet man in Kapitel 10 von Theil, H., Principles of Econometrics, Amsterdam 1971.

$$(3.32) \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} Y'X(X'X)^{-1}X'Y & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \delta_u^2$$

Da das zu LIML gehörende stochastische  $k$  unter recht schwachen Bedingungen beide Voraussetzungen erfüllt, folgt daraus insbesondere asymptotisch gleiche Verteilung von LIML und TSLS. Eine weitere Äquivalenzklasse in diesem Sinn bilden 3SLS, FIML sowie die meisten anderen Full-Information-Verfahren. Für von einem Vielfachen der Identitätsmatrix verschiedene  $\sum_u$  ist deren obigem  $\bar{S}$  entsprechende Kovarianzmatrix kleiner als  $\bar{S}$  im Sinn der bekannten Halbordnung für symmetrische Matrizen.

Derartige asymptotische Aussagen geben jedoch einem Praktiker, der prinzipiell mit endlichen Stichproben arbeitet, selten mehr als nur "cold comfort", wie Johnston treffend bemerkt.<sup>1</sup> Will man aber auf analytischem Weg Eigenschaften bei endlichen Stichproben ermitteln, steht man angesichts der Parametervielzahl und der Kompliziertheit der Schätzfunktionen vor nahezu unüberwindlichen Schwierigkeiten. Hier eine kurze Übersicht über bisherige Erfolge:<sup>2</sup>

Basman zeigt 1961, daß in Systemen mit zwei Gleichungen ohne verzögerte endogene Variable Erwartungswert und Varianz der TSLS-Schätzfunktionen nicht in jedem Fall existieren.<sup>3</sup>

Für  $m-m^*-g^*+1 = 0$  existieren weder Erwartungswert noch Varianz.

Für  $m-m^*-g^*+1 = 1$  existiert der Erwartungswert, aber nicht die Varianz.

Für  $m-m^*-g^*+1 > 1$  existieren sowohl Erwartungswert als auch Varianz.

<sup>1</sup> Johnston, J., *Econometric Methods*, New York 1963, S. 275.

<sup>2</sup> Eine ausführlichere Darstellung findet man bei Basman, R. L., "Exact Finite Sample Distributions for Some Econometric Estimators and Test Statistics: A Survey and Appraisal", S. 209-271 in Intriligator, M. D. und Kendrick, D. A., *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. II, Amsterdam 1974.

<sup>3</sup> Basman, R. L., "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-identified Cases", *JASA* 56, 1961, 619-636.

1963 beweist Basman diese Aussagen auch für Systeme mit 3 Gleichungen.<sup>1</sup> Kabe kommt auf andere Weise zu den gleichen Ergebnissen.<sup>2</sup> Richardson verallgemeinert diese Resultate wie folgt:<sup>3</sup>

Für Systeme mit beliebig vielen Gleichungen existieren die Momente von TSLS bis zum Grad der Überidentifikation (wenn man  $m-m^*-g^*+1$  als Überidentifikationsgrad bezeichnet). Jedoch dürfen in der betrachteten Gleichung nur zwei endogene Variable vorkommen. Mariano zeigt, daß Richardsons Aussagen auch bei beliebig vielen endogenen Variablen gelten.<sup>4</sup>

Ullah und Nagar gehen über die Frage nach der Existenz hinaus und geben Formeln für die exakte Berechnung der Erwartungswerte an.<sup>5</sup>

Ähnliche Ergebnisse wurden von Sawa,<sup>6</sup> Takeuchi,<sup>7</sup> Mariano<sup>8</sup>

---

<sup>1</sup> Basman, R. L., "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in a Leading Three Equations Case", JASA 58, 1963, 161-171.

<sup>2</sup> Kabe, D. G., "A Note on the Exact Distribution of the GCL-Estimators in Two Leading Over-Identified Cases", JASA 58, 1963, 535-537 und Kabe, D. G., "On the Exact Distributions of the GCL-Estimators in a Leading Three Equations Case", JASA 59, 1964, 881-894.

<sup>3</sup> Richardson, D. H., "The Exact Distribution of a Structural Coefficient Estimator", JASA 63, 1968, 1214-1226.

<sup>4</sup> Mariano, R. S., "The Existence of Moments of the Ordinary Least Squares and Two-Stage-Least-Squares Estimators", Econometrica 40, 1972, 643-652.

<sup>5</sup> Ullah, A. und Nagar, A. L., "The Exact Mean of the Two-Stage-Least-Squares Estimator of the Structural Parameters in an Equation Having Three Endogenous Variables", Econometrica 42, 1974, 749-758.

<sup>6</sup> Sawa, T., "The Exact Sampling Distributions of Ordinary Least Squares and Two-Stage-Least-Squares Estimators", JASA 64, 1969, 923-937.

<sup>7</sup> Takeuchi, K., "On the Exact Moments of the OLS, TSLS and the Instrumental Variables Method Estimators", IER 11, 1970, 1-12.

<sup>8</sup> Siehe Mariano, R. S., a. a. O.

sowie Richardson und Wu<sup>1</sup> auch für die Verfahren OLS und HV (Takeuchi) bewiesen.

Bergstrom<sup>2</sup> hat die Schätzungen der marginalen Konsumquote im einfachen Keyneschen Modell untersucht. Alle Verfahren außer OLS liefern hier die gleiche Schätzfunktion.

Sawa<sup>3</sup> stellt für die Verfahren der k-Klasse und nichtstochastisches k folgendes fest:

Für  $0 \leq k-1$  gelten analoge Aussagen wie für TLSLS. Dagegen existieren für  $k > 1$  nicht einmal die Erwartungswerte, unabhängig vom Grad der Überidentifikation.

Mariano und Sawa<sup>4</sup> weisen diese wenig erfreuliche Eigenschaft auch für LIML nach.

Damit sind, soweit uns bekannt, die Aussagen über exakte stochastische Eigenschaften bei endlichen Stichproben erschöpft. Da sämtliche Sätze nur in Systemen ohne endogene Lag-Variable gelten und Aussagen über Full-Information-Verfahren vollständig fehlen, wird die Wahl eines geeigneten Schätzverfahrens dadurch wenig erleichtert.<sup>5</sup>

Im folgenden noch einige nicht-stochastische Eigenschaften und weniger bekannte asymptotische Resultate.

---

<sup>1</sup> Richardson, D. H. und Wu, D. M., "A Note on the Comparison of Ordinary and Two-Stage-Least-Squares Estimators", *Econometrica* 39, 1971, 973-981.

<sup>2</sup> Bergstrom, A. P., "The Exact Sampling Distribution of Least Squares and Maximum Likelihood Estimators of the Marginal Propensity to Consume", *Econometrica* 30, 1962, 480-490.

<sup>3</sup> Sawa, T., "Finite Sample Properties of the k-Class Estimators", *Econometrica* 40, 1972, 653-680.

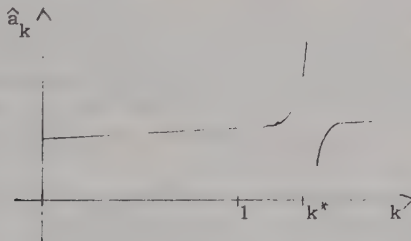
<sup>4</sup> Mariano, R. und Sawa, T., "The Exact Finite Sample Distribution of the Limited-Information-Maximum-Likelihood Estimator in the Case of Two Included Endogenous Variables", *JASA* 67, 1972, 159-163.

<sup>5</sup> Siehe jedoch Basman, R. L., Richardson, D. H. und Rohr, R. J., "An Experimental Study of Structural Estimators and Test Statistics Associated with Dynamical Econometric Models", *Econometrica* 42, 1974, 717-730. Hier wird durch eine Monte Carlo Studie die Hypothese erhärtet, daß analoge Eigenschaften auch in dynamischen Systemen gelten.

So sind z. B. einige zum Teil verblüffende Zusammenhänge bekannt zwischen verschiedenen Schätzverfahren. Da ist zunächst der Fall der Übereinstimmung nahezu aller Limited-Information-Verfahren für genau identifizierte Gleichungen. Sind auch alle übrigen Gleichungen genau identifiziert, liefern auch viele Full-Information-Verfahren eben diese Werte. Darüber hinaus trifft man auch oft in überidentifizierten Gleichungen den Fall an, daß an sich verschiedene Prinzipien zur gleichen Schätzfunktion führen. Die Übereinstimmung von LIML-Schätzungen mit den Werten, die man durch Anwendung des Prinzips des minimalen Varianzquotienten erhält, wurde bereits erwähnt. So führten auch mehrere Begründungen von TSLS zur gleichen Formel (3, 18). Ein weiteres frappierendes Beispiel liefert Chow. Durch ungewöhnliche Verallgemeinerung von OLS gewinnt er ein neues Full-Information-Verfahren, um dann die identische Übereinstimmung der so gewonnenen Schätzungen mit den FIML-Werten festzustellen.<sup>1</sup>

Theil untersucht Eigenschaften von  $k$ -Klasse Schätzungen in endlichen Stichproben auf folgende Weise:<sup>2</sup>

Bei gegebenem Modell und Beobachtungsdaten verfolgt er den  $k$ -Klasse-Schätzwert  $\hat{a}_k$  eines festen Strukturparameters  $a$  in Abhängigkeit von  $k$ . Das folgende Diagramm gibt einen typischen Kurvenverlauf wieder:



Dieses Diagramm ist typisch in zweierlei Hinsicht:

Zunächst einmal stellt Theil fest, daß für  $k \leq 1$  der jeweilige Wert von

---

<sup>1</sup> Chow, G. C., "A Comparison of Alternative Estimators for Simultaneous Equations", *Econometrica* 32, 1964, 532-553.

<sup>2</sup> Siehe Theil, H., *Economic Forecasts ...*, a. a. O., S. 237.

$k$  das Schätzergebnis kaum beeinflusst. Sodann gibt es einen kritischen Punkt  $k^*$ , für den die Schätzwerte "explodieren". Für diesen Wert von  $k$  wird die Matrix auf der linken Seite von (3, 28) singulär. Offenbar werden für  $k$ -Werte in dieser Umgebung die Schätzungen sehr unzuverlässig. Typischerweise liegt dieser kritische Wert jeweils zwischen 1 und 1,5, so daß im Licht dieser Eigenschaft das Ergebnis von Mariano und Sawa über die Nichtexistenz der Varianz von LIML sehr plausibel erscheint.<sup>1</sup> Bekanntlich ist der stochastische  $k$ -Wert dieses Verfahrens immer größer oder gleich 1.

Maeshiro gelangt über verwandte Gedankengänge zu einem frappierenden Resultat über das Verhältnis von OLS-, TLS- und LIML-Schätzwerten.<sup>2</sup> Er kann nachweisen, daß für Gleichungen mit nur zwei endogenen Variablen die TLS-Schätzungen eines gegebenen Strukturparameters immer zwischen den entsprechenden OLS- und LIML-Werten liegen müssen. Ähnliches haben Kadiyala und Oi gezeigt.<sup>3</sup>

Weitere Ergebnisse über Eigenschaften von Schätzverfahren, die sich nicht ohne weiteres in die bisher behandelten Kategorien einordnen lassen, stammen von Kadane,<sup>4</sup> Nagar<sup>5</sup> und Owen.<sup>6</sup>

---

<sup>1</sup> Siehe Mariano, R. und Sawa, T., a. a. O.

Auch das Ergebnis von Sawa über die Nichtexistenz der Varianz für festes  $k > 1$  erscheint nun naheliegend. Siehe Sawa, T., a. a. O.

<sup>2</sup> Maeshiro, A., "A Simple Mathematical Relationship among  $k$ -Class Estimators", JASA 61, 1966, 368-374.

<sup>3</sup> Kadiyala, K. R., "An exact Small Sample Property of the  $k$ -Class Estimator", Econometrica 38, 1970, 930-932 und Oi, W. Y., "On the Relationship among Different Members of the  $k$ -Class", IER 10, 1969, 36-46.

<sup>4</sup> Kadane, J. B., "Comparison of  $k$ -Class Estimators when Disturbances Are Small", Econometrica 39, 1971, 723-738.

<sup>5</sup> Nagar, A. L., "The Bias and Moment Matrix of the General  $k$ -Class Estimators of the Parameters in Simultaneous Equations", Econometrica 27, 1959, 575-595.

<sup>6</sup> Owen, A. D., "A Proof that both the Bias and the Mean Square Error of the Two-Stage-Least-Squares Estimator are Monotonically Non-Increasing Functions of Sample Size", Econometrica 44, 1976, 409-411.

Owen wendet sich dem Problem zu, daß Konsistenz oder asymptotische Erwartungstreue für ein Schätzverfahren nicht notwendig eine monotone Verbesserung der Qualität bei Vergrößerung der Stichprobe nach sich ziehen muß. So ist etwa der Fall denkbar, daß ein an sich konsistentes Verfahren bis zu einem gewissen Stichprobenumfang immer schlechtere Ergebnisse liefert, bis dann die Konsistenzeigenschaft zu wirken beginnt. Owen zeigt nun, daß dieser Fall zumindest für TSLS nicht eintreten kann.

Nagar richtet sein Augenmerk vor allem auf die asymptotische Erwartungstreue von  $k$ -Klasse Schätzungen. Sei dazu  $\hat{\delta}_{k, T}$  die  $k$ -Klasse Schätzung für  $\delta$  aus (3.28) in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang  $T$ . Asymptotische Erwartungstreue im hier gewählten Sinn - auch andere Definitionen sind möglich - bedeutet, daß für  $T \rightarrow \infty$  gelten muß:  
$$\lim E(\hat{\delta}_{k, T} - \delta) = 0.$$
Natürlich wird hier implizit die Existenz dieser Größe für alle  $T$  vorausgesetzt, was nach dem oben Gesagten nicht in jedem Fall erfüllt sein muß. Nagar kann nun durch geeignete Wahl von  $k$  erreichen, daß sogar die weit stärkere Eigenschaft  
$$\lim T E(\hat{\delta}_{k, T} - \delta) = 0$$
gilt. Jedoch sind dazu - neben der reinen Existenz der Erwartungswerte - weitere Annahmen vonnöten. Durch wiederum andere Wahl von  $k$  erhält er ein Verfahren, dessen asymptotische Kovarianzmatrix "kleiner" ist als  $\bar{S}$  aus (3.32). Diese Verfahren werden im folgenden "unbiased TSLS" bzw. "minimum second Moment" genannt.

Ein vollkommen anderer Aspekt asymptotischer Theorie wird von Kadane betrachtet. Er führt Grenzbetrachtungen durch für einen anderen Parameter als den Stichprobenumfang  $T$ . Nach Multiplikation von  $\sum_u$  mit einer Konstanten  $c$  läßt er diese Konstante gegen 0 gehen und betrachtet die Grenzwerte der Kovarianzmatrizen von LIML und TSLS mit dem Ergebnis, daß TSLS in diesem Sinne besser ist als LIML.

Ein weiterer Unterschied zwischen TSLS und LIML hat in der Literatur zum Teil heftige Diskussionen ausgelöst. Im Gegensatz zu LIML hängen nämlich die TSLS-Schätzwerte für die Parameter einer Gleichung davon ab, welcher Parameter a priori zu 1 normiert, d.h. welche Variable in (3.7) auf die linke Seite gesetzt wird.<sup>1</sup> In diesem Sinn ist TSLS also nicht "symmetrisch". Chow etwa benutzt diese Tatsache zur Diskriminierung von TSLS gegenüber LIML.<sup>2</sup> Auch Wold führt als ein Argument zugunsten seines Fixpunktverfahrens dessen Symmetrie ins Feld.<sup>3</sup>

Dazu ist folgendes zu sagen:

Interpretiert man Strukturgleichungen eines simultanen Gleichungsmodells als Ausdruck einseitiger Kausalbeziehungen zwischen den rechtsseitigen Variablen und der Variablen auf der linken Seite, so wird deren Wahl nicht durch Willkür, sondern ökonomische Theorie bestimmt. Insofern kann man das Argument von Chow umkehren und bemerken, daß nur TSLS, nicht aber LIML diese Information berücksichtigt.

Die Kausalinterpretation von Strukturgleichungen ist in der Literatur jedoch nicht unwidersprochen geblieben. Vor allem Wold hat in seinen Schriften immer wieder dagegen Stellung bezogen.<sup>4</sup> Eine Schlichtung dieser Streits ist aber nicht Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit, und so wollen wir diesen Punkt auf sich beruhen lassen.

---

<sup>1</sup> Natürlich werden auch bei LIML die absoluten Werte der Parameter sich ändern, je nachdem welcher von ihnen zu 1 normiert wird. Im Gegensatz zu TSLS bleiben aber die relativen Werte unverändert.

<sup>2</sup> Analoges gilt für 3SLS und FIML.

<sup>3</sup> Siehe Wold, H. und Mosbaek, E., a. a. O.  
In Kapitel 11 dieser Arbeit nimmt Lyttkens eine ausführliche Diskussion symmetrischer und asymmetrischer Verfahren vor.

<sup>4</sup> Siehe etwa Wold, H., "Causality and Econometrics", a. a. O.

Ein weiterer bislang unentschiedener Streit geht um die Frage, ob Schätzungen der reduzierten Form, die man auf dem Umweg über Schätzungen der Strukturmatrizen erhält, besser sind als DLS. In Modellen ohne endogene Lag-Variable gelten für die Gleichungen der reduzierten Form die Annahmen des klassischen Regressionsmodells, so daß DLS unter allen linearen unverzerrten Schätzverfahren das beste ist. Schätzungen über den Umweg der Strukturmatrizen (im folgenden zur Klasse der "restricted-reduced-form-estimators" zusammengefaßt im Gegensatz zu DLS, dem "unrestricted-reduced-form-estimator") sind aber weder linear noch unverzerrt, so daß das Theorem von Gauss-Markov noch keine Überlegenheit von DLS verbürgt.

Da DLS keine a priori Informationen über Strukturparameter verwertet, wird im Gegenteil vielfach die Meinung vertreten, DLS müsse allein deswegen den restricted-reduced-form Schätzungen notwendig unterlegen sein. Vor allem in den Arbeiten von Lawrence Klein kehrt dieses Werturteil immer wieder.<sup>1</sup> Daß solche Aussagen jedoch mit Vorsicht zu betrachten sind, geht z. B. aus einer Arbeit von McCarthy hervor, der für einen Spezialfall nachweist, daß noch nicht einmal die Varianzen der restricted-reduced-form Koeffizienten existieren müssen.<sup>2</sup> Natürlich liefert DLS keinen Aufschluß über die Struktur des Wirtschaftsgeschehens, so daß auch bei einer Überlegenheit von DLS bei der Schätzung der reduzierten Form und damit zu Prognosezwecken die Existenzberechtigung von Strukturschätzungen nicht entfällt.

---

<sup>1</sup> Siehe etwa Klein, L. R., *Economic Fluctuations in the United States 1921-1941*, New York 1950, S. 5.

<sup>2</sup> McCarthy, M. D., "A Note on the Forecasting Properties of Two-Stage-Least-Squares Restricted Reduced Forms - The Finite Sample Case", IER 13, 1972, 757-761.

Überblickt man zusammenfassend die in diesem Kapitel vorgestellten Eigenschaften konkurrierender Schätzverfahren, muß man resignierend deren nahezu völlige Nutzlosigkeit in praktischen Auswahl-situationen konstatieren. Gerade das, was in der Praxis am dringendsten von Nöten wäre, Aussagen über stochastische Eigenschaften in endlichen Stichproben, läßt sich nur sehr mühevoll und für Spezialfälle erlangen. Daher verwundert nicht, daß bislang sehr verbreitet auf Monte Carlo Experimente als zwar bequemen, aber einzig möglichen Ausweg zurückgegriffen wurde. Auch in Zukunft wird diese wohl die einzige Möglichkeit zum Vergleich von Schätzverfahren in endlichen Stichproben sein. So meint z. B. Wold: "It is likely to be a long time before mathematical expressions for the exact distributions for small samples are available for more than a small class of models. . . . In the meantime, Monte Carlo work can be used to detect the really significant differences in methods of estimation." <sup>1, 2</sup>

Wir verlassen damit die einführende Diskussion exakter Eigenschaften und kommen zum Kern unserer Arbeit, dem empirischen Vergleich von Schätzverfahren an Hand von Zufallsexperimenten.

---

<sup>1</sup> Siehe Wold, H. und Mosbaek, E., a. a. O., S. 95.  
In dem Kapitel 2.1 dieser Arbeit, "Monte Carlo Investigations as a Research Tool", gibt Wold eine überzeugende und ausführliche Rechtfertigung dieses Ansatzes.

<sup>2</sup> Vom Standpunkt der vorliegenden Arbeit wäre diesem Zitat noch hinzuzufügen: Falls solche "really significant differences" überhaupt existieren!

#### 4. Ein neuer Simulationsansatz

##### a) Allgemeines zu Monte-Carlo Experimenten

Die Bedeutung von Zufallsexperimenten zur statistischen Bestimmung unbekannter Konstanten ist in der Mathematik seit längerem bekannt. Man denke etwa an die experimentelle Bestimmung der Konstanten  $\pi$  oder an frühe "Student"-sche Versuche zur empirischen Ermittlung von Kenngrößen gewisser statistischer Prüfverteilungen.<sup>1</sup> Jedoch wurde erst mit der Einführung elektronischer Rechenmaschinen eine Nutzung dieser Möglichkeiten in größerem Maßstab möglich. Mittlerweile ist wohl schwerlich noch ein Band einer statistischen Fachzeitschrift denkbar -abgesehen von solchen rein mathematischer Ausrichtung-, der nicht über derartige Versuche berichtet.

Die Durchführung von Zufallsexperimenten auf Rechenanlagen wirft allerdings einige eher technische Probleme auf, die sich in zwei Gruppen einteilen lassen. Da ist zunächst die Erzeugung der Zufallszahlen selbst. In einem ersten Schritt wird hier im allgemeinen eine Folge  $R_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) von Zahlen erzeugt, die sich als Beobachtungen unabhängiger, im Intervall  $(0, 1)$  gleichverteilter Zufallsvariablen interpretieren lassen. Dazu gibt es in der Literatur eine Reihe von Vorschlägen. Für die vorliegende Arbeit wurde die Multiplikative Kongruenzmethode verwandt:

Seien  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen ( $a \neq 0$ ) sowie  $r_0$  und  $p$  reelle Zahlen mit  $p > r_0 > 0$ . Ist  $r_i$  ( $i > 0$ ) definiert durch

$$r_i = a r_{i-1} + b \pmod{p},$$

so ist  $R_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) durch  $R_i = r_i/p$  bestimmt.

---

<sup>1</sup> Nachzulesen etwa bei Newman, T. G. und Odell, P. L., The Generation of Random Variates, London 1971.

Natürlich ist die Folge  $R_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) durch  $a$ ,  $b$ ,  $r_0$  und  $p$  eindeutig festgelegt und rekonstruierbar. Daher wird vielfach auch die Bezeichnung "Pseudozufallszahlen" gebraucht. Jedoch läßt sich durch geeignete Wahl obiger Konstanten erreichen, daß die Folge der  $R_i$  vorgegebene Tests auf Zufälligkeit besteht und sich im Intervall  $(0, 1)$  gleichmäßig verteilt.

In konkreten Anwendungen wird die zu simulierende Zufallsvariable  $Z$  allerdings selten einer Gleichverteilung folgen. Sei  $F$  die Verteilungsfunktion von  $Z$ . Durch  $Z_i := F^{-1}(R_i)$  erhält man offenbar eine Folge von Pseudozufallszahlen mit Verteilungsfunktion  $F$ . Weiterhin wurden für spezielle  $F$  alternative Vorschläge gemacht.<sup>1</sup> Insbesondere sind für die Simulation normalverteilter Zufallsvariablen eine ganze Reihe numerisch effektiverer Methoden entwickelt worden. Für die im Anhang dieser Arbeit kurz referierten Experimente wurde etwa der folgende Satz von Box und Muller benutzt:<sup>2</sup>

Sind  $U$  und  $V$  in  $(0, 1)$  gleichverteilte und unabhängige Zufallsvariable, so sind die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit

$$\begin{aligned} X &:= (-2 \ln U)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi V \\ Y &:= (-2 \ln U)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi V \end{aligned}$$

unabhängig und standardnormalverteilt.

Wegen des relativ großen Rechenzeitbedarfs der Methode von Box und Muller wurde ferner in Abschnitt 4 d) der vorliegenden Arbeit auf eine Bibliotheksprozedur zurückgegriffen, die approximativ normalverteilte Zufallsvariable unter Benutzung des Zentralen Grenzwertsatzes durch Addition und anschließende Standardisierung unabhängiger und gleichverteilter Variablen erzeugt.

---

<sup>1</sup> Stellvertretend für viele weitere Arbeiten seien etwa genannt: Atkinson, A. C. und Pearce, M. C., "The Computer Generation of Beta, Gamma and Normal Random Variables", Journal of the Royal Statistical Society A 139, 1976, 431-447.

<sup>2</sup> Box, G. E. P. und Muller, M. E., "A Note on the Generation of Random Normal Deviates", AMS 29, 1958, 610-611.

Die zweite in Monte-Carlo Experimenten auftretende Problemgruppe betrifft die möglichst effektive (rechenzeitsparende) Nutzung der so erzeugten Zufallszahlen. Dazu macht man sich zunächst klar, daß jede experimentelle Ermittlung einer unbekannten Konstanten eine Interpretation als Schätzung des Erwartungswertes einer geeignet gewählten Zufallsvariablen erlaubt. Zur Illustration betrachte man etwa die Verzerrung der OLS-Schätzung  $\hat{a}_{OLS}$  eines Strukturparameters  $a$  des Modells (3.2). Diese ist offenbar gegeben als Erwartungswert der Zufallsvariablen  $Z := \hat{a}_{OLS} - a$ . Liegen ferner  $N$  unabhängige Realisierungen der Zufallsmatrix  $U$  aus (3.2) und daraus abgeleitet  $N$  Beobachtungen  $z_1, \dots, z_N$  der Zufallsvariablen  $Z$  vor, erhält man  $1/N (z_1 + \dots + z_N)$  als Monte-Carlo Schätzung für die Verzerrung von OLS. Diese Vorgehensweise wird auch "direct sampling" genannt.

Die Qualität einer Monte Carlo Schätzung wird üblicherweise durch die Standardabweichung gemessen. Für den Fall des "direct sampling" ist diese offenbar proportional zu  $1/\sqrt{N}$ . Eine Verkleinerung um den Faktor 10 erfordert somit eine 100-fache Vermehrung der Zahl der Beobachtungen. Daran läßt sich im Prinzip auch durch sogenannte "sampling tricks" nichts ändern. Immerhin ist aber durch den Gebrauch gewisser "variance-reduction techniques" eine mitunter drastische Verkleinerung des Proportionalitätsfaktors zu erzielen.<sup>1</sup> Die Technik der antithetischen Variablen, angewandt auf obiges Beispiel, reduziert zunächst den Aufwand bei der Erzeugung der Pseudo-Zufallsmatrizen  $U_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) durch  $U_2 := -U_1$ ,  $U_4 := -U_3$  usw. auf die Hälfte. Im allgemeinen folgt daraus weiter, daß  $\text{cov}(Z_1, Z_2)$ ,  $\text{cov}(Z_3, Z_4)$  usw.  $< 0$ , so daß auch die Varianz von  $1/N (Z_1 + \dots + Z_{1/2})$  kleiner ist als beim "direct sampling", wo die  $Z_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) unkorreliert erzeugt werden. Die negative Korrelation abhängiger  $Z_i$ 's muß aber in jedem Einzelfall nachgeprüft werden. So führt die hier skizzierte Vorgehensweise bei der Monte-Carlo Schätzung von Varianzen mitunter zu positiven Korrelationen, so daß sich die Qualität der Ergebnisse ver-

---

<sup>1</sup> Zu diesen Fragen und Begriffen siehe etwa Newman, T. G. und Odell, P. L., a. a. O., S. 53-66.

glichen zum "direct sampling" verschlechtert.

Eine alternative Möglichkeit zur Verbesserung der Simulationsgenauigkeit eröffnen sogenannte Kontrollfunktionen. Eine derartige Funktion ist im obigen Beispiel gegeben durch eine mit  $Z$  positiv korrelierte Zufallsvariable  $W$  mit bekanntem Erwartungswert. Für  $\text{cov}(Z, W) > 1/2 \text{ var}(W)$  gilt dann mit  $Z^* := \text{erw}(W) + Z - W$ :

$$\text{erw}(Z^*) = \text{erw}(Z), \text{ aber } \text{var}(Z^*) < \text{var}(Z).$$

Somit liefert  $1/N (z_1^* + \dots + z_N^*)$  eine bessere Schätzung der Verzerrung von OLS als das "direct sampling". Natürlich muß in einem konkreten Einzelfall eine solche Funktion  $W$  erst einmal gefunden werden.

In der vorliegenden Arbeit wird in Übereinstimmung mit nahezu allen bislang durchgeführten Monte-Carlo Untersuchungen über ökonometrische Schätzverfahren (siehe Abschnitt 4c) nach der Methode des "direct sampling" verfahren. Zum einen bringen alternative Methoden keine prinzipielle Qualitätsverbesserung der Resultate mit sich, lediglich der Simulationsaufwand zur Erzielung einer vorgegebenen Genauigkeit vermindert sich. Diese Rechenzeiterparnis muß aber abgewogen werden gegen die zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Erstellung des benötigten Computerprogramms. Zum anderen kommt es in der vorliegenden Untersuchung nicht in jedem Einzelfall auf den exakten Wert des weiter unten (siehe Abschnitt 4d) zu definierenden Qualitätskriteriums an. Bei der Vielzahl der durchgeführten Experimente kann man vielmehr davon ausgehen, daß eventuelle Fehler sich neutralisieren und der Gesamteindruck über die relative Qualität der untersuchten Schätzverfahren korrekt erhalten bleibt.

Eine weitere bei der Diskussion von Monte-Carlo Untersuchungen auftretende Streitfrage betrifft die Möglichkeit der Verallgemeinerung der erzielten Resultate. Einige Autoren scheinen hier fälschlicherweise von einer Gleichwertigkeit analytisch und experimentell abge-

geleiteter Ergebnisse auszugehen. So nennt etwa Summers den ersten Weg den "personal intensive-" und die zweite Möglichkeit den "capital intensive approach" und scheint auf einen ansonsten gleichen Wert dieser "forms of attack" zu plädieren.<sup>1</sup> Offenbar wird hier der fundamentale Unterschied übersehen, der zwischen Induktion und Deduktion als Erkenntnismitteln besteht. Ergebnisse von Zufallsexperimenten gelten nur für die jeweils zugrundegelegte Parameterkombination, und Schlüsse auf nicht durch Experimente getestete Konstellationen sind nur bedingt und nach zusätzlichen Überlegungen erlaubt.

So ist etwa in vielen Situationen eine mehr oder weniger "dichte" Überdeckung des Raumes der a priori zugelassenen Parameterkombinationen möglich. Jedoch führt diese Vorgehensweise nur bei hinreichend "kleinem" Parameterraum zum Erfolg, so daß angesichts der Vielzahl der in simultanen Gleichungssystemen wichtigen Einflußgrößen ein solcher Ansatz hier notwendig scheitern muß. Selbst in den ehrgeizigsten der in Abschnitt 4c) vorzustellenden bisherigen Untersuchungen bleiben wichtige Parameter konstant und damit die Ergebnisse durch diese bedingt. Alternativ hat etwa Conlisk vorgeschlagen, die durch Zufallsexperimente zu ermittelnde Größe als Funktion der zugrundegelegten Parameter aufzufassen und diese sogenannte "response surface" mit Mitteln der Regressionstheorie zu schätzen.<sup>2</sup> Jedoch sind dazu a priori Kenntnisse über die funktionale Form dieser Beziehung vonnöten, die für das hier behandelte Problem nicht gegeben sind. In der vorliegenden Arbeit wird daher keine Verallgemeinerung der erzielten Resultate versucht. Ebenso findet im Gegensatz zu früheren Untersuchungen keine systematische Variation gewisser Parameter statt. Die vorgeführten Experimente sollen vielmehr lediglich als eine Art Test der in der Einleitung formulierten Hypothese dienen. Das ist zwar verglichen mit anderen Studien ein bescheideneres, dafür aber die Möglichkeiten derartiger Untersuchungen nicht ungebührlich überschätzendes Ziel.

---

<sup>1</sup> Summers, R., "A Capital Intensive Approach to the Small Sample Properties of Various Simultaneous Equation Estimators", *Econometrica* 33, 1965, 1-41.

<sup>2</sup> Conlisk, J., "Optimal Response Surface Design in Monte Carlo Sampling Experiments", *AESM* 3, 1974, 463-473.

## b) Qualitätskriterien

Sei  $\hat{a}$  die mit einem gewissen Verfahren gewonnene Schätzfunktion für einen Strukturparameter  $a$  des Modells (3.2). Die Beurteilung der Qualität von  $\hat{a}$  setzt offenbar eine je nach Individuum verschiedene Verlustfunktion voraus. Dementsprechend ist in früheren Simulationsstudien eine beträchtliche Vielfalt an Qualitätsmaßstäben zu beobachten. "Die ganze Geschichte der beschreibenden Statistik wird nach Maßen der Lage und Streuung durchsucht", wie Seibt zutreffend bemerkt.<sup>1</sup> Wie aus Tabelle (4.1) deutlich werden wird, wurden in den ersten Arbeiten häufig die mittlere quadratische Abweichung (im folgenden MSE für "Mean Square Error") oder die Wurzel daraus (im folgenden RMSE für "Root Mean Square Error") verwendet. Wegen

$$\text{MSE}(\hat{a}) = \text{erw}(\hat{a}-a)^2 = \text{var}(\hat{a}) + (\text{erw}(\hat{a}-a))^2$$

faßt dieses Maß die auf der Varianz und der Verzerrung (Bias) von  $\hat{a}$  beruhende Abweichung additiv zusammen. Die Wurzel aus der Varianz wird im folgenden mit SE (für "Standard Error") abgekürzt.

Wie aber Basman(1961) zuerst gezeigt hat, müssen Bias und MSE einer Schätzfunktion nicht in jedem Fall existieren. Er folgert daraus, daß auch deren empirischer Widerpart in Simulationsstudien ein ungeeignetes Mittel zur Beschreibung eines Verfahrens ist. Insbesondere kann man mit wachsender Zahl der Experimente keine Konvergenz dieser Größen erwarten. Führt man die Experimente mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage durch, ist dies jedoch wegen der beschränkten Größe der Zahlen, die solche Anlagen handhaben können, kein gültiges Argument.

Als Beispiel betrachte man etwa die Simulation einer Standard-Cauchyverteilten Zufallsvariablen  $Z$  auf der für die vorliegende Arbeit benutzten

---

<sup>1</sup> Seibt, H., Schätzung und Prognose bei simultanen Gleichungsmodellen; Eine Monte-Carlo Untersuchung, Göttingen 1968.

Rechenanlage, eine Telefunken TR 440 des Rechenzentrums der Universität Kaiserslautern. Der Absolutbetrag der größten mit dieser Maschine noch zu bewältigenden Zahl ist  $8,3 \cdot 10^{152}$ . Größere durch einen Zufallszahlengenerator erzeugte Werte von  $Z$  führen zum Abbruch der Rechnung. Die Verteilung der tatsächlich beobachteten Zufallsvariablen  $Z^*$  ist somit die bedingte Verteilung von  $Z$ , gegeben  $|Z| \leq 8,3 \cdot 10^{152}$ , deren Momente bis zu jeder beliebigen Ordnung existieren. Ferner gilt für beliebiges  $c > 0$ :

$$W(|Z| > c) < 1/c.$$

Zum Beweis betrachte man ein reelles  $x$  mit  $0 < x < \pi$ . Wegen  $\sin x < 1$ ,  $\cos x > 1 - 2x/\pi$  hat man:

$$\tan x = \sin x / \cos x < f(x) := 1 / (1 - 2x/\pi)$$

Daraus folgt aber für beliebiges  $y > 0$ :

$$\arctan y > f^{-1}(y) = \pi/2 - \pi/2y.$$

und somit  $W(|Z| > c) = 1 - (2/\pi) \arctan c < 1 - (2/\pi)(\pi/2 - \pi/2c) = 1/c$ .

Somit hat man  $W(Z \neq Z^*) < 1/8,3 \cdot 10^{152}$ , was wohl für alle praktische Zwecke eine zu vernachlässigende Größe ist. Insbesondere erscheinen die Momente von  $Z^*$  sehr wohl geeignet, die Lage und Streuung von  $Z$  zu messen. Analoge Argumente gelten -mutatis mutandis- für die Simulation ökonomischer Schätzfunktionen, was mithin trotz Basmans Resultaten den Gebrauch von Maßen wie Bias, SE oder MSE in Monte-Carlo Experimenten auch weiterhin rechtfertigt. Zudem erscheint es zweifelhaft, ob die Nichtexistenz dieser Größen an der fehlenden Konvergenz ihrer empirischen Gegenstücke erkennbar ist, wie das etwa Hendry und Srba behaupten.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Hendry, D. und Srba, F., "The Properties of Autoregressive Instrumental Variables Estimators in Dynamic Systems", *Econometrica* 45, 1977, 969-990.

Trotzdem wurden nach der Arbeit Basmans vermehrt alternative Kriterien gebraucht. So etwa die mittlere absolute Abweichung (MAE für "Mean Absolute Error"), der Quartilsabstand oder der Medianabstand (ME für "Median Error").

Allen bis hier erwähnten Kriterien ist gemeinsam, daß sie für jeden zu schätzenden Strukturparameter getrennt berechnet werden. Die Rangfolge der Verfahren stimmt aber nicht für jeden dieser Parameter überein. Das ist eines der wichtigsten Ergebnisse, das sich aus bisherigen Simulationsstudien ableiten läßt. Daher die Suche nach einer geeigneten "summary statistic". So schreibt zum Beispiel Klein:<sup>1</sup>  
"There is a great need for a summary statistic, applicable to a whole system of equations, for comparison of different methods". Und weiter:  
"I would suggest the standard error of forecast of endogenous variables" (im folgenden SEF abgekürzt).

Zwar ist auch hier die Zahl verschiedener Rangskalen noch gleich der Zahl der endogenen Variablen. Diese wird in der Regel aber erheblich kleiner sein als die Zahl der zu schätzenden Strukturparameter. Die vorliegende Arbeit schließt sich daher dem Klein'schen Vorschlag an und gebraucht ausschließlich die Prognosegüte als Maß für die Qualität eines Schätzverfahrens. Als zusätzlicher und im vorliegenden Fall ausschlaggebender Vorteil scheint dieses Kriterium auch dann noch sinnvoll zu sein, wenn ein Vergleich von wahren und geschätzten Strukturparametern wegen Fehlspezifikation des Modells nicht möglich ist. Allerdings wird zur konkreten Messung der Abweichung von prognostizierten und tatsächlichen Zukunftswerten der endogenen Variablen in 4d) ein vom SEF abweichendes Kriterium definiert.

---

<sup>1</sup> Klein, L. R., "Single Equation ...", a. a. O., S. 869.

### c) Frühere Simulationsstudien

Mit der Verbreitung elektronischer Rechenanlagen wurden Simulationsstudien in der Ökonometrie immer häufiger. Sowey hat 1973 die bis dato wichtigsten Arbeiten in einer umfangreichen Bibliographie zusammengestellt (mit einem beträchtlichen Bias zugunsten des angelsächsischen Sprachraumes).<sup>1</sup> Hier interessieren zunächst nur Vergleiche von Schätzverfahren in simultanen Gleichungssystemen. Eine Übersicht der wichtigsten diesbezüglichen Beiträge findet man bei Johnston.<sup>2</sup> Auch Seibt liefert eine nützliche Zusammenstellung.<sup>3</sup>

Für die vorliegende Arbeit wurden die folgenden Beiträge ausgewertet. In der Reihenfolge des Erscheinens:

Ladd, G. W., "Effects of Shocks and Errors in Estimation: An Empirical Comparison", *Journal of Farm Economics* 38, 1956, 485-495.

Wagner, H. M., "A Monte Carlo Study of Estimates of Simultaneous Linear Equations", *Econometrica* 26, 1958, 117-133.

Neiswanger, W. A. und Yancey, T. A., "Parameter Estimates and Autonomous Growth", *JASA* 54, 1959, 389-402.

Nagar, A. L., "A Monte Carlo Study of Alternative Simultaneous Equation Estimators", *Econometrica* 28, 1960, 573-590.

Summers, R., "A Capital Intensive Approach to the Small Sample Properties of Various Simultaneous Equation Estimators", *Econometrica* 33, 1965, 1-41.

---

<sup>1</sup> Sowey, E. R., "A Classified Bibliography of Monte Carlo Studies in Econometrics", *J. of E.* 1, 1973, 377-395.

<sup>2</sup> Johnston, J., *Econometric Methods*, 2. Aufl. New York 1972, 408-420.

<sup>3</sup> Seibt, H., a. a. O., S. 25-31.

- Quandt, R. E., "On Certain Small Sample Properties of k-Class Estimators", IER 6, 1965, 92-104.
- Schink, W. A. und Chiu, J. S., "A Simulation Study on the Influence of Multicollinearity and Autocorrelation on Estimates of Parameters", Journal of Financial and Quantitative Analysis 1, 1966, 36-67.
- Cragg, J. G., "On the Sensitivity of Simultaneous Equation Estimators to the Stochastic Assumptions of the Model", JASA 61, 1966, 136-151.
- Cragg, J. G., "On the Relative Small Sample Properties of Several Structural Equation Estimators", Econometrica 35, 1967, 89-110.
- Cragg, J. G., "Some Effects of Incorrect Specification on Small Sample Properties of Several Simultaneous Equation Estimators", IER 9, 1968, 63-86.
- Seibt, H., Schätzung und Prognose bei simultanen Gleichungsmodellen; Eine Monte-Carlo-Untersuchung, Göttingen 1968.
- Hansen, G., "Die Prognoseeignung von LISE- und FIND-Maximum-Likelihood-Schätzwerten", Statistische Hefte 10, 1969, 22-45.
- Grenzdörfer, K., Vergleich einiger in der Ökonometrie verwendeter Schätzverfahren mittels Simulation von Drei-Gleichungssystemen, Würzburg 1969.
- Wold, H. und Mosbaek, H., Interdependent Systems - Structure and Estimation, Amsterdam 1970.
- Glahe, F. R. und Hunt, J. G., "The Small Sample Properties of Simultaneous Equation Least Absolute Estimators vis à vis Least Squares Estimators", Econometrica 38, 1970, 742-752.
- Smith, V. K., "A Monte Carlo Experiment with a Large Macro-Econometric Model", Western Economic Journal 8, 1970, 377-384.
- Smith, V. K., "Economic Anonymity and Monte Carlo Studies", Applied Economics 3, 1971, 35-46.
- Hurd, M. D., "Small Sample Estimation of a Structural Equation with Auto-Correlated Errors", JASA 67, 1972, 567-573.

Mikhail, W. M., "A Comparative Monte Carlo Study of the Properties of Econometric Estimators", JASA 70, 1975, 94-104.

Khazzoom, J. D., "An Indirekt Least Squares Estimator for Overidentified Equations", Econometrica 44, 1976, 741-750.

Hendry, D. und Srba, F., "The Properties of Autoregressive Instrumental Variables Estimators in Dynamic Systems", Econometrica 45, 1977, 969-990.

Tabelle (4.1) faßt zunächst die wichtigsten Merkmale der hier betrachteten Untersuchungen zusammen.<sup>1</sup> Dabei werden die folgenden bisher nicht definierten Symbole verwendet:

N : Zahl der Experimente

G1 : Zahl der Gleichungen

ve : Zahl der verzögerten endogenen Variablen

FS: Fehlspezifikation

AK: Autokorrelation

ex : Zahl der exogenen Variablen

PW: das weiter unten definierte Schätzverfahren von Prais und  
Winsten<sup>2</sup>

ALS: Verallgemeinerung von OLS für den Fall autokorrelierter Störgrößen

AIV: Analoge Verallgemeinerung von HV

Die Auswertung der Monte Carlo Experimente kann unter verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. So schreibt z. B. Johnston:

"There are four major questions that one would like such studies to

---

<sup>1</sup> Eine ähnliche, aber weniger umfangreiche, Zusammenstellung findet man auch in Smith, V. K., "A Comparative Tabular Survey of Monte Carlo and Exact Sampling Studies", Australian Economic Papers 10, 1971, 196-202.

<sup>2</sup> Eine zunächst für das klassische Regressionsmodell mit korrelierten Störgrößen gedachte Methode. Näheres im Anhang.

Tabelle (4.1)

(Übersicht bisheriger Simulationsstudien)

| Autor                  | Gl | Ex                 | ve | T  | N                     | FS | AK | Verfahren                                       | Qual.Krit.                              |
|------------------------|----|--------------------|----|----|-----------------------|----|----|-------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Ladd(1956)             | 2  | 5                  | 0  | 30 | 30                    | x  | -  | LIML, OLS                                       | Bias, SE                                |
| Wagner<br>(1958)       | 2  | 2                  | 1  | 20 | 100                   | -  | -  | LIML, TSLS,<br>HV, OLS                          | RMSE, emp.Vert.                         |
| Neisw.&Y.<br>(1959)    | 2  | 5                  | 0  | 25 | 120                   | x  | -  | LIML, OLS                                       | RMSE                                    |
| Nagar<br>(1960)        | 2  | 2                  | 1  | 20 | 100                   | -  | -  | OLS, TSLS, unb.<br>TSLS, minimum<br>sec. moment | MSF                                     |
| Summers<br>(1965)      | 2  | 5                  | 0  | 20 | 50<br>40              | x  | -  | FIML, LIML,<br>OLS, TSLS, DLS                   | RMSE, SEF, Bias                         |
| Quandt<br>(1965)       | 4  | 6                  | 0  | 20 | 100                   | -  | -  | OLS, TSLS                                       | Konz., ME,<br>RMSE, SEF                 |
| Schink &<br>Chiu(1966) | 2  | 4                  | 0  | 25 | 50                    | -  | -  | OLS, TSLS,                                      | Bias, RMSE                              |
| Cragg<br>(1966)        | 3  | 7                  | 0  | 20 | 50                    | x  | x  | OLS, TSLS, LIML<br>FIML, unb. TSLS              | ME, Quart.abst.<br>Bias                 |
| Cr. (1967)             | 3  | 7                  | 0  | 20 | 50                    | -  | -  | "                                               | "                                       |
| Cr. (1968)             | 3  | 7                  | 0  | 20 | 50                    | x  | -  | "                                               | "                                       |
| Seibt<br>(1968)        | 2  | 4                  | 0  | 15 | 50                    |    |    |                                                 |                                         |
|                        | 2  | 4                  | 1  | 30 | 100                   | x  | -  | OLS, TSLS, LIML                                 | MSE, SEF, Bias                          |
| Hansen<br>(1969)       | 2  | 4                  | 1  | 15 | 50                    | x  | x  | FIML, LIML                                      | Bias, SE, RMSE, SEF                     |
| Grenzd.<br>(1969)      | 3  | 5                  | 0  | 20 | 50                    | -  | x  | OLS, TSLS,<br>LIML, FIML                        | Anzahl der Abl. bei<br>Test auf Erw.tr. |
| Wold &<br>Mosb. (1970) |    | versch.<br>Modelle |    | 40 | 100                   | x  | -  | OLS, TSLS, FIML<br>FP                           | Bias, MSE,<br>R <sup>2</sup> -Statistik |
| Glahe &<br>Hunt(1970)  | 2  | 4                  | 0  | 10 | 50                    | x  | -  | OLS, TSLS, CLA,<br>TSLA, DLS, DLA               | RMSE, MAE, SEF                          |
| Smith<br>(1970)        | 34 | 7                  |    | 17 | 50                    | -  | -  | OLS, TSLS,<br>LIML                              | Bias, RMSE                              |
| Smith<br>(1971)        |    | Klein I            |    | 20 | 50                    | -  | -  | OLS, TSLS,<br>LIML, DLS                         | "                                       |
| Hurd<br>(1972)         | 2  | 1                  | 0  | 10 | 100<br>20<br>30       | -  | x  | OLS, TSLS, PW                                   | MSE                                     |
| Mikhail<br>(1975)      | 2  | 6                  | 0  | 20 | 100                   | -  | -  | OLS, TSLS, LIML,<br>3SLS, FIML, LML             | MAE, MSE, Bias                          |
| Khazzoom<br>(1976)     | 3  | 7                  | 0  | 20 | 100<br>40<br>60       | -  | -  | ILS, TSLS, LIML                                 | Bias, ME, RMSE                          |
| Hendry &<br>Srba(1977) | 4  | 0                  | 4  | 20 | 100<br>40<br>60<br>80 | -  | x  | ALS, AIV                                        | Bias, SE                                |

answer. First of all there is the question of whether the asymptotic differences between OLS on the one hand and simultaneous estimators on the other show up clearly in finite samples ... A second major question concerns the finite sample properties of estimators whose asymptotic properties may be identical, like 2SLS and LISE or 3SLS and FIML, and thirdly one would like to know how the various estimators behave when specification errors are present whether singly or multiply. For instance what happens if disturbances are autocorrelated, if errors in variables are present, if there is serious collinearity, if variables are wrongly excluded or if various combinations of these things occur? ... In addition one may be interested in similar questions about the reduced form coefficients and in how the system as a whole performs in generating forecasts of the endogenous variable from the reduced form."<sup>1</sup>

Leider geben die auf den Seiten 51-53 aufgelisteten Untersuchungen nicht auf alle diese Fragen eine eindeutige Antwort. Man ist versucht, einzuwenden: Wie auch zu erwarten war! Denn eine derart komplexe Materie wie das Schätzproblem in simultanen Gleichungssystemen bei endlichen Stichproben gibt zu Hoffnungen auf einfache Lösungen keinen Anlaß.

Eine vergleichsweise eindeutige Antwort ist noch auf die erste der von Johnston angeschnittenen Fragestellungen zu geben. Der üblicherweise von den Autoren unterstellte Stichprobenumfang (siehe Tabelle (4.1)) reicht aus, damit die asymptotische Überlegenheit der Simultanschätzverfahren gegenüber OLS zur Wirkung kommt. Am deutlichsten wurde das für die Verzerrung festgestellt (Summers, Seibt, Cragg(1967)). Dieses Ergebnis gilt allerdings nur für korrekt spezifizierte Modelle

---

<sup>1</sup> Siehe Johnston, J., *Econometric Methods*, 2. Aufl., a. a. O., S. 408-409.

und scheint auch von der Größe des Modells abzuhängen. In der bislang einzigen Untersuchung mit einem realistischen, aus 34 Gleichungen bestehenden makroökonomischen Modell kommt Smith(1970) zu gänzlich anderen Resultaten: "In general DLS ranked the best technique according to all criteria across all estimated coefficients",<sup>1</sup> Dabei steht DLS in der Bezeichnungsweise von Smith für OLS.

Der zweite von Johnston angesprochene Problemkreis wurde bislang dagegen von Monte-Carlo Untersuchungen nur wenig erhellt. Bei der Durchsicht dieser Arbeiten fällt im Gegenteil als erstes die uneinheitliche Bewertung konkurrierender Verfahren auf. Zum Teil mag das auf abweichende Qualitätskriterien zurückzuführen sein, aber auch für ein gegebenes Kriterium ist die Rangfolge der Verfahren nicht in allen Modellen und noch nicht einmal für alle Strukturparameter eines gegebenen Modells identisch, wie das Zitat von Cragg(1967) auf Seite 32 beweist. Der Grund für dieses Phänomen wurde hier bereits auf Seite 31 genannt: Es existiert kein Schätzverfahren für simultane Gleichungssysteme, das gleichmäßig für alle Modelle und Parameter optimale Ergebnisse liefert. Damit ist auch die Suche nach einem solchen Verfahren von vornherein zum Scheitern verurteilt, trotz einiger recht gekünstelter Versuche, angesichts unterschiedlicher Ergebnisse ein bestimmtes Verfahren zum "Besten" zu erklären. Immerhin hat sich aber fast durchweg ein Vorsprung von "Full-Information"-Verfahren gegenüber "Limited-Information"-Methoden gezeigt (Summers, Cragg(1967), Hansen, Grenzdörfer, Wold&Mosbaek, Mikhail).

Mehrere Autoren versuchen, die Aussagekraft ihrer Monte-Carlo Resultate mit verschiedenen Methoden zu verbessern. Lediglich in zwei Untersuchungen (Mikhail, Hendry&Srba) wird dabei auf die in 4a) vorgestellten "sampling tricks" zurückgegriffen. Sehr verbreitet ist dagegen der Einsatz statistischer Testverfahren zur Überprüfung der Signifikanz erzielten Ergebnisse. Grenzdörfer verwendet sogar die Anzahl der Ablehnungen

---

<sup>1</sup> Smith, V. K., "A Monte Carlo Experiment ...", a.a.O., S. 380.

bei einem einfachen Vorzeichentest auf Gleichheit von wahrem Parameterwert und Median der Schätzfunktion als einziges Kriterium. Ein weiterer Test wird zum paarweisen Vergleich je zweier Methoden herangezogen:

Seien  $\hat{a}_1$  und  $\hat{a}_2$  zwei Schätzfunktionen für den Strukturparameter  $a$  in (3.2). Die Hypothese  $H_0: W(|\hat{a}_1 - a| > |\hat{a}_2 - a|) = 1/2$  ist offenbar durch die Häufigkeit  $N_1$  zu testen, mit der in  $N$  Beobachtungen  $|\hat{a}_1 - a| > |\hat{a}_2 - a|$ . Bei Gültigkeit von  $H_0$  folgt  $N_1$  einer Binomialverteilung mit den Parametern  $N$  und  $1/2$ . Jedoch erscheinen Aussagen über  $H_0$  für den Vergleich der Güte von Schätzverfahren wenig informativ. Insbesondere ist  $H_0$  nicht äquivalent zu  $H_0^*$ :  $MAE(\hat{a}_1) = MAE(\hat{a}_2)$ , wie etwa in der wohl am häufigsten in der Literatur zitierten Untersuchung von Summers fälschlicherweise behauptet wird.<sup>1</sup> Als Gegenbeispiel sei  $a=0$ ,  $W(\hat{a}_1=-1) = W(\hat{a}_1=1) = 1/2$ ,  $W(\hat{a}_2=0) = 2/3$ ,  $W(\hat{a}_2=3) = 1/3$ . Ferner seien  $\hat{a}_1$  und  $\hat{a}_2$  unabhängig. Dann ist offenbar  $MAE(\hat{a}_1) = MAE(\hat{a}_2) = 1$ , aber  $W(|\hat{a}_1 - a| > |\hat{a}_2 - a|) = 2/3$ . In der vorliegenden Arbeit werden daher die Simulationsergebnisse keinen weiteren Tests unterzogen. Vielmehr erscheint die Annahme gerechtfertigt, daß individuelle, auf die Zufallsvariabilität der Simulationsergebnisse zurückgehende Fehleinschätzungen sich bei der Vielzahl der in 4d) und 4e) referierten Einzelresultate gegenseitig aufheben und den Gesamteindruck über die relative Qualität der Schätzverfahren, auf den es hier vor allem ankommt, nicht verfälschen.

Als Fehlschlag muß man wohl auch den Versuch einiger Autoren bewerten, durch möglichst dichte Überdeckung des Parameterraumes zu allgemeinen Ergebnissen zu kommen. So untersucht etwa Seibt in seiner sehr ehrgeizigen Arbeit mehr als 300 Parameterkonstellationen, verglichen mit nur zwei verschiedenen Kombinationen in der bekannten Pionierarbeit von

---

<sup>1</sup> Summers, R., a. a. O., S. 13.

Wagner. Da jedoch den Experimenten nur zwei Modelle zugrundeliegen, bleiben auch die Ergebnisse durch diese bedingt. Nur in einer Studie (Wold&Mosbaek) wird eine größere Zahl von Modellen unterstellt. Zusätzlich enthalten diese nur in wenigen Fällen (Smith, Wold&Mosbaek, Quandt) mehr als drei Gleichungen. Das Gros der untersuchten Systeme wird von 2-Gleichungsmodellen gebildet. Zwar werden auch solche Modelle in der Praxis benutzt, etwa in der Gestalt von Marktmodellen mit einer Angebots- und Nachfragegleichung, aber für das zweite wichtige Anwendungsfeld simultaner Gleichungssysteme, die makroökonometrische Erfassung der Gesamtwirtschaft, sind derartige Umfänge nicht gerade typisch. Dazu tritt die folgende von Summers treffend zum Ausdruck gebrachte Grundhaltung einiger Autoren: "The model ... was deliberately made economically anonymous ... This was so that an appraisal of the estimating methods ... would have general applicability".<sup>1</sup>

Diese Logik mag verstehen wer will. Inwiefern soll eine Kausalkette existieren zwischen "economic anonymity" des Modells und "general applicability" der Resultate?! Simulationsergebnisse gelten in jedem Fall nur für das zugrundegelegte Modell, ob dieses nun eine ökonomische Bedeutung besitzt oder nicht. Somit ist Summers sogar in einer schlechteren Position als andere Autoren, die Modelle mit ökonomischem Gehalt verwenden (Seibt, Smith, Hansen). Deren Resultate lassen sich zumindest in einem ökonomisch bedeutsamen Fall interpretieren, während diese Gewißheit für die Ergebnisse von Summers nicht besteht.

Hauptansatzpunkt zur Kritik bisheriger Untersuchungen ist jedoch der allzu zaghafte Gebrauch einer Möglichkeit, zu deren Nutzung Simulationsstudien geradezu prädestiniert erscheinen: Die realitätsgetreue Imitation von Situationen, denen sich Praktiker in konkreten Anwendungen gegenübersehen. Damit ist gemeint, daß die den jeweiligen Modellen zugrundeliegenden Zeitreihen wohl niemals exakt durch den Mechanismus erzeugt werden, den das Modell vereinfachend unterstellt. Jedes Modell ist nur ein mehr oder weniger unvollkommenes Bild der Wirklichkeit. In der

---

<sup>1</sup> Summers, R., a. a. O., S. 4.

Literatur wird dafür die Bezeichnung "Fehlspezifikation" gebraucht. Trotz der anerkannten Allgegenwärtigkeit dieses Phänomens wurden dessen Auswirkungen auf die relative Qualität von ökonometrischen Schätzverfahren bislang in Simulationsstudien nur wenig untersucht; Summers, Cragg(1968), Seibt und Hansen unterstellen inkorrekte Nullrestriktionen, Ladd und Cragg(1966) Meßfehler in den exogenen Variablen. Ferner werden die Konsequenzen von autokorrelierten (Cragg(1966), Hansen, Grenzdörfer, Hurd) und heteroskedastischen (Cragg(1966)) Störgrößen verfolgt. In der bislang ausführlichsten Untersuchung zu diesem Problemkreis betrachtet Cragg(1968) weiterhin die ungerechtfertigte Spezifizierung einer endogenen Variablen als exogen. Als Ergebnis dieser Versuche hat sich -um damit die dritte von Johnston aufgeworfene Frage zu beantworten- eine relative Robustheit von OLS gegenüber derartigen Modellabweichungen gezeigt, was die Resultate der vorliegenden Untersuchung bestätigt. Nur selten wurde jedoch erforscht, was -um mit Johnston zu sprechen- geschieht, "if various combinations of these things occur".

Zusammenfassend bleibt festzustellen, daß bislang in Monte-Carlo Untersuchungen über ökonometrische Schätzverfahren zu oft von unrealistischen Situationen ausgegangen und die eigentlich nur in derartigen Untersuchungen gegebene Chance eines praxisnahen Vergleichs der Schätzmethoden nicht genutzt worden ist. Trotzdem haben diese Studien das Urteil der Fachwelt geprägt. Die Auswahl von Verfahren in konkreten Anwendungen beruht als bedenklicherweise auf Situationen, die für diese Anwendungen nicht typisch sind.

d) Eigene Zufallsexperimente

Durch die folgende Versuchsanordnung soll den weiter oben vorgetragenen Kritikpunkten Rechnung getragen werden:

Die zur Schätzung benötigten Zeitreihen werden durch ein relativ disaggregiertes, umfangreiches Modell erzeugt, im folgenden Grundmodell genannt.

Zur Abwehr der weiter oben kritisierten "economic anonymity" werden Varianten tatsächlich geschätzter Modelle mit den von den jeweiligen Autoren geschätzten Originalparametern verwendet. Die Zeitreihen der exogenen sowie Startwerte der verzögerten endogenen Variablen stimmen ebenfalls mit den Originalwerten überein. Unter Umständen wurden Originalparameter abgeändert, um eine ungefähre Übereinstimmung der endogenen Zeitreihen mit den tatsächlich beobachteten Reihen zu erhalten.

Den so erzeugten Reihen wurde ein kleineres, mehr aggregiertes Modell angepaßt, im folgenden Schätzmodell genannt.

Es wird kein Versuch zur Ableitung allgemeingültiger Ergebnisse gemacht. Daher findet auch keine systematische Variation von Strukturparametern, Varianzen, exogenen Zeitreihen und was auch immer statt. Wir möchten die simulierten Modelle vielmehr interpretiert sehen als Zufallsauswahl aus der Menge aller theoretisch möglichen und ökonomisch sinnvollen Systeme. Dem Einwand der Praxisferne hoffen wir dadurch zu begegnen, daß wir die Zeitreihen der endogenen Variablen durch einen erheblich komplizierteren Mechanismus als im Schätzmodell vereinfachend angenommen erzeugen. Insbesondere bringt dies eine fälschliche Betrachtung von im Grundmodell endogenen Variablen als exogen mit sich.

Die Strukturparameter des Schätzmodells werden mit den Methoden OLS, TSLS und 3SLS geschätzt. Zusätzlich wird die DLS-Schätzung der reduzierten Form berechnet. Eine Berücksichtigung von Maximum-

Likelihood-Verfahren konnte unterbleiben, da diese sich schon in früheren Studien als anfälliger gegen Fehlspezifikation erwiesen haben. Gleichberechtigung oder Überlegenheit von OLS gegenüber TSLS und 3SLS würde a fortiori analoge Vergleiche mit Maximum-Likelihood-Verfahren erlauben. Dagegen bedauern wir den Ausschluß des Wold-schen Fixpunktverfahrens. Da wir aber erst nach Abschluß der Experimente Zugang zur entsprechenden Literatur erhielten, konnte dieses Verfahren nicht mehr berücksichtigt werden.

Die Programme zur Schätzwertberechnung stammen vom Verfasser und sind an Beispielen aus der Literatur getestet.

Da die Parameter des Schätzmodells im allgemeinen ohne Gegenstück im Grundmodell bleiben, kommt als Qualitätskriterium nur ein Maß für die Prognosegüte in Frage.

Dazu betrachten wir für jede im Schätzmodell als endogen angenommene Variable  $Y_i$  und für einen gegebenen Satz von Zukunftswerten der vorherbestimmten Variablen des Schätzmodells die wie folgt definierte Zufallsvariable  $z_i$ :

$$(4.2) \quad z_i = \frac{\hat{y}_{i, T+1} - y_{i, T+1}}{y_{i, T}} .$$

Dabei steht  $\hat{y}_{i, T+1}$  für den mit Hilfe eines bestimmten Schätzverfahrens prognostizierten Wert der i-ten endogenen Variablen in der dem Beobachtungszeitraum folgenden Periode.

Wegen

$$(4.3) \quad z_i = \frac{\hat{y}_{i, T+1} - y_{i, T}}{y_{i, T}} - \frac{y_{i, T+1} - y_{i, T}}{y_{i, T}}$$

betrachten wir also gerade die Differenz zwischen prognostizierter und tatsächlicher Wachstumsrate der i-ten endogenen Variablen.

Für jede reelle Zahl  $c > 0$  kann man nun betrachten:

$$(4.4) \quad W(z_i \leq c) .$$

Der empirische Widerpart dieser Größe, die relative Häufigkeit von Prognosefehlern mit Absolutbetrag  $\leq c$ , wird im folgenden als Effizienzkriterium verwendet.

Gegen diese Wahl könnte man einwenden, daß bei Verwendung von (4.4) als Qualitätsmaßstab alle Prognosefehler innerhalb und alle Fehler außerhalb des Intervalls  $[-c, c]$  jeweils gleich bewertet werden. Damit fallen Unterschiede in Prognosefehlern, sobald dieser eine gewisse Schranke überschreitet, nicht mehr ins Gewicht.

Hier kann man zur Verteidigung anführen, daß in praktischen Anwendungen Prognosen unberücksichtigt bleiben oder an Hand externer Informationen korrigiert werden, die eine gewisse a priori festgelegte Glaubwürdigkeitsschwelle überschreiten. Aber auch ohne dieses Argument läßt sich die Wahl von (4.4) durch den Gebrauch mehrerer Werte für  $c$  rechtfertigen, wie im folgenden durchgeführt.

Auf Grund früherer Versionen der vorliegenden Arbeit wurde häufig in mündlichen Diskussionen mit dem Verfasser die Aussagekraft der Prognosegüte und speziell des Maßes (4.4) zur Beurteilung konkurrierender Schätzverfahren kritisiert. Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die Wahl des konkreten Maßes (4.4) zur Messung der Prognosegüte zeitlich vor der Entwicklung der in Abschnitt 4b) niedergelegten Argumente erfolgte, d.h. es wurde ein Maß gesucht, dessen theoretisches Gegenstück in jedem Fall existiert. Diese Bedingung ist für das obige Maß offensichtlich erfüllt. Ferner wird auch hier die Fragwürdigkeit der Prognosegüte allgemein zum Qualitätsvergleich verschiedener Modelle nicht bestritten. Bekanntlich sind häufig "naive" Modelle ("alles bleibt so wie es ist") in Bezug auf die Prognosegüte aufwändigeren Modellen überlegen. Dieses Argument gilt jedoch nicht beim Vergleich der Qualität konkurrierender Verfahren zur Anpassung eines gegebenen Modells.

Trotzdem wurde in einer hier nicht wiedergegebenen, da noch andauernden, Serie von Experimenten mit alternativen Qualitätsmaßstäben gearbeitet. Es ist geplant, die Ergebnisse demnächst an geeigneter Stelle zu publizieren. So wurde etwa die Tatsache benutzt, daß auch bei wegen

Fehlspezifikation nicht korrekt schätzbaren Strukturparametern eine korrekte Schätzung gewisser Funktionen dieser Größen wie zum Beispiel totale Multiplikatoren unter Umständen weiterhin möglich ist. Ferner wurden Prognosen über mehrere Perioden hinweg untersucht. Alternativ zu (4, 4) wurden dabei die korrekt prognostizierten Vorzeichen und Wendepunkte als Kriterien gebraucht, sowohl für Absolutgrößen als auch Wachstumsraten. Als wichtigstes vorläufiges Resultat bleibt jedoch festzuhalten, daß auch der Gebrauch alternativer Effizienzkriterien die Ergebnisse der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Experimente vollauf bestätigt.

In der weiteren Versuchsanordnung werden Zukunftswerte von endogenen Variablen ohne Addition von Störgrößen erzeugt. Die Zukunftswerte der vorherbestimmten Variablen des Schätzmodells, auch die der zu Unrecht in diese Kategorie eingeordneten, werden als bekannt vorausgesetzt. So werden Prognosefehler eliminiert, die allein auf Zufallsabweichungen oder ungenauer Kenntnis der exogenen Zukunftswerte beruhen. Übrig bleibt der hier allein interessierende auf das Schätzverfahren zurückzuführende Prognosefehler.

Für verschiedene Kombinationen von Grund- und Schätzmodell wurde je ein Experiment durchgeführt. Ein Experiment beinhaltet 100 Durchgänge. Pro Experiment bleiben Strukturparameter, stochastische Eigenschaften der Störgrößen, exogene Variable und Startwerte der verzögerten endogenen Variablen des Grundmodells unverändert. Durch Addition normalverteilter Pseudo-Zufallsvektoren werden jedoch 100 verschiedene Reihen endogener Variablen erzeugt.

Die Komponenten der Zufallsvektoren sind autokorreliert, aber unabhängig innerhalb einer Periode. Ihre Varianzen entsprechen in etwa den Werten, die von den Autoren der jeweiligen Grundmodelle für die Restgrößen angegeben wurden.

Um die Abhängigkeit der Prognosegüte von exogenen Zukunftswerten zu testen, wurden pro Durchgang zum Teil mehrere Prognosen erstellt, jeweils für verschiedene Werte der exogenen Zukunftsvariablen.

# 1. Experiment

In Anlehnung an Kleins Modell III unterstellen wir das folgende Grundmodell:<sup>1</sup>

(4, 5)

$$C_1 = 6 + 0,4 (W_1 + W_2) + 0,3 (Y - T - W_1 - W_2) + 0,2 C_{1-1} + 0,16 C_{1-2} - 0,5 \dot{C}_2 \\ - 0,05 C_{2-1} - 0,01 C_{2-2} + 0,1 Y_{-1} + u_1$$

$$C_2 = 6 + 0,1 Y + 0,05 Y_{-1} - 0,1 C_{2-1} - 0,1 C_{2-2} - 0,1 C_1 - 0,1 i + u_2$$

$$I = 3 + 0,12 (X - E) + 0,1 (X - F)_{-1} - 0,1 i - 0,05 i_{-1} - 0,01 i_{-2} \\ - 0,06 K_{-1} - 0,04 K_{-2} + u_3$$

$$W_1 = 5 + 0,4 (X - F) + 0,25 (X - E)_{-1} + 0,2 (t - 1931) + u_4$$

$$H = 12 + 4,6 p + 0,12 X - 1,5 i + 0,3 H_{-1} + 0,02 H_{-2} + u_5$$

$$D_1 = -7 + 3,8 (Y_{-1}) + 0,02 (Y + Y_{-1} + Y_{-2}) - 0,1 D_{1-1} - 0,1 D_{1-2} \\ - 0,1 D_{2-1} - 0,05 D_{2-2} - 0,1 i_{-2} + 0,005 \Delta F + u_6$$

$$D_2 = -2 + 2,8 r_{-1} + 0,02 q_{1-1} + 0,5 q_{1-2} + 0,002 \Delta F_{-1} - 0,18 i \\ - 0,08 i_{-1} - 0,05 i_{-2} + u_7$$

$$i = 3 + 0,3 i_{-1} + 0,3 i_{-2} - 0,0005 E_R - 0,03 (t - 1931) + u_8$$

$$X = Y + T - W_2$$

$$Y = I + H + C_1 + C_2 + D_1 + D_2 + D_3 - D'' + G - T$$

$$K = K_{-1} + I + H - H_{-1} + D_1 + D_2 + D_3 - D''$$

<sup>1</sup> Siehe Klein, L. R., Economic Fluctuations in the United States 1921-1941, New York 1950.

Das hier verwendete Grundmodell ist an das in dieser Arbeit veröffentlichte Modell III angelehnt. Siehe S. 102 ff für eine ausführliche Beschreibung.

Im Gegensatz zu Klein fehlt der monetäre Sektor, da die Geldmenge im Schätzmodell nicht benötigt wird und auch andere endogene Variable nicht beeinflußt. Ferner wurde der Konsum disaggregiert und zur Erzielung einer größeren Realitätsnähe die Zahl der erklärenden Variablen in einigen Gleichungen vermehrt. Dies können wir unbesorgt tun, da wir das Grundmodell nur zur Erzeugung endogener Zeitreihen benutzen und Schätz- und Identifikationsprobleme damit ohne Bedeutung sind.

Die Größen werden zu konstanten Preisen gemessen und haben folgende Bedeutung:

- (4.6)
- $C_1$  : Privater Verbrauch nicht-dauerhafter Konsumgüter
  - $C_2$  : Privater Verbrauch dauerhafter Konsumgüter
  - $I$  : Private Netto-Ausrüstungsinvestitionen
  - $W_1$  : Lohnsumme in der Privatindustrie
  - $H$  : Vorratsbestand
  - $D_1$  : Bruttoinvestition in selbstbewohnte Eigenheime
  - $D_2$  : Bruttoinvestition in zu vermietende Wohnobjekte
  - $D_3$  : Bruttoinvestition in landwirtschaftliche Wohngebäude
  - $D''$  : Abschreibungen auf Wohngebäude insgesamt
  - $i$  : Durchschnittsrendite auf Industrieobligationen
  - $X$  : Privater Output
  - $Y$  : Verfügbares Volkseinkommen
  - $K$  : Kapitalstock
  - $G$  : Staatsausgaben
  - $W_2$  : Einkommen in öffentlichem Dienst und Landwirtschaft
  - $P$  : Preisindex des Bruttosozialprodukts
  - $r$  : Mietindex
  - $q_1$  : Baukostenindex
  - $E$  : Indirekte Steuern
  - $F$  : Neue Familien
  - $E_R$  : Überschußreserven
  - $T$  : Staatseinnahmen

Die Störgrößen  $u_i$  bilden stationäre autoregressive Prozesse erster Ordnung mit einheitlichem Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,2$ .

Für ihre Varianzen werden die folgenden Werte angenommen:

1, 1, 2, 1,5, 0,5, 0,5, 0,5, 0,2.<sup>1</sup>

Den durch obiges Grundmodell erzeugten Zeitreihen wurde Kleins Modell I als Schätzmodell angepaßt:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad C^* &= \alpha_0 + \alpha_1 P^* + \alpha_2 P_{-1}^* + \alpha_3 (W_1^* + W_2^*) \\
 I^* &= \beta_0 + \beta_1 P^* + \beta_2 P_{-1}^* + \beta_3 K_{-1}^* \\
 W_1^* &= \gamma_0 + \gamma_1 X^* + \gamma_2 X_{-1}^* + \gamma_3 (t-1931) \\
 X^* &= C^* + I^* + G^* - W_{-2}^* \\
 P^* &= X^* - W_1^* - T^* \\
 K^* &= K_{-1}^* + I^*
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad C^* &= C_1 + C_2 \\
 I^* &= I + H - H_{-1} + D_1 + D_2 + D_3 - D'' \\
 W_1^* &= W_1 \\
 W_2^* &= W_2 \\
 X^* &= X \\
 P^* &= X - W_1 - T \\
 K^* &= K \\
 G^* &= G \\
 T^* &= T
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Experimente mit anderen Korrelationskoeffizienten und Varianzen lieferten nahezu identische Ergebnisse. Obige Varianzen wurden gewählt auf Grund von Tabelle V, S. 111 der Kleinschen Arbeit.

<sup>2</sup> Für eine ausführliche Modellbeschreibung siehe Klein, L. R., *Economic Fluctuations ...*, a. a. O., S. 58 ff.

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise und um dem Leser eine Kontrolle zu ermöglichen, hier die ausführlichen Resultate von Durchgang Nr. 1 im ersten Experiment:

Nach Umformung (4.8) ergaben sich folgende Zeitreihen für die Variablen des Schätzmodells:

(4.9)

| C*   | I*   | W <sub>1</sub> * | X*   | P*   | K*    | W <sub>1</sub> *+W <sub>2</sub> * |
|------|------|------------------|------|------|-------|-----------------------------------|
| 45.8 | 2.7  | 32.3             | 50.7 | 13.8 | 99.7  | 37.3                              |
| 52.1 | 15.0 | 44.0             | 69.3 | 19.3 | 115.5 | 40.0                              |
| 57.2 | 11.2 | 49.5             | 69.9 | 16.0 | 126.7 | 54.0                              |
| 55.3 | 4.6  | 44.0             | 60.8 | 9.5  | 131.3 | 50.8                              |
| 51.5 | 5.6  | 42.0             | 59.0 | 9.4  | 136.9 | 47.0                              |
| 46.9 | -0.9 | 36.3             | 43.5 | -2.2 | 136.0 | 42.8                              |
| 40.1 | -3.2 | 31.1             | 36.9 | -0.2 | 132.7 | 37.1                              |
| 36.0 | -3.3 | 26.3             | 33.8 | -1.2 | 129.5 | 33.3                              |
| 31.0 | -2.4 | 23.1             | 30.1 | -2.0 | 127.0 | 30.6                              |
| 26.4 | -0.2 | 19.1             | 22.5 | -1.0 | 118.8 | 26.1                              |
| 33.9 | 0.0  | 24.5             | 34.4 | 5.9  | 113.8 | 32.0                              |
| 40.4 | -2.1 | 29.8             | 40.3 | 9.5  | 116.7 | 27.8                              |
| 41.9 | -4.4 | 23.9             | 38.5 | 5.6  | 112.3 | 36.9                              |
| 50.7 | 8.5  | 39.4             | 62.2 | 17.8 | 120.8 | 46.4                              |
| 56.9 | 13.1 | 49.2             | 74.0 | 13.8 | 133.9 | 53.2                              |
| 63.3 | 11.8 | 53.2             | 75.6 | 18.4 | 145.7 | 59.7                              |
| 58.0 | 4.0  | 50.1             | 65.0 | 6.9  | 149.7 | 57.1                              |
| 60.6 | 7.3  | 49.1             | 72.9 | 15.8 | 157.0 | 57.1                              |
| 50.8 | 4.1  | 46.9             | 67.9 | 10.9 | 161.1 | 55.9                              |
| 56.9 | 2.9  | 45.3             | 65.3 | 9.0  | 164.0 | 54.8                              |

| X <sub>-1</sub> * | P <sub>-1</sub> * | K <sub>-1</sub> * | W <sub>2</sub> * | T*   | G*   |
|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------|------|
| 40.0              | 8.2               | 97.0              | 4.5              | 4.1  | 6.7  |
| 50.7              | 13.8              | 99.7              | 5.0              | 6.0  | 6.3  |
| 69.3              | 19.3              | 115.5             | 4.5              | 6.4  | 6.0  |
| 69.9              | 14.0              | 126.7             | 6.0              | 6.5  | 6.9  |
| 60.8              | 9.5               | 131.3             | 5.0              | 7.0  | 6.9  |
| 59.0              | 9.4               | 136.9             | 4.5              | 8.0  | 7.0  |
| 48.5              | 2.2               | 136.0             | 6.0              | 7.9  | 8.0  |
| 36.8              | -0.2              | 132.7             | 7.0              | 5.7  | 8.0  |
| 33.8              | -1.2              | 129.5             | 7.5              | 9.0  | 9.0  |
| 30.1              | -2.0              | 127.0             | 7.0              | 5.0  | 9.4  |
| 22.5              | -1.0              | 118.8             | 7.5              | 4.0  | 8.0  |
| 34.4              | 5.9               | 113.8             | 8.0              | 1.0  | 10.0 |
| 40.3              | 9.5               | 116.7             | 5.0              | 4.0  | 9.0  |
| 38.5              | 5.6               | 112.3             | 7.0              | 5.0  | 10.0 |
| 62.2              | 17.8              | 120.8             | 6.0              | 5.0  | 10.0 |
| 74.0              | 13.8              | 133.9             | 5.5              | 7.0  | 10.0 |
| 75.6              | 18.4              | 145.7             | 7.0              | 2.0  | 11.0 |
| 65.0              | 6.9               | 149.7             | 8.0              | 5.0  | 13.0 |
| 72.9              | 15.8              | 157.0             | 9.0              | 10.0 | 14.0 |
| 67.9              | 10.9              | 161.1             | 9.5              | 11.0 | 15.0 |

Bei Schätzung mit OLS, TSLS und 3SLS ergibt sich damit für Modell (4.7):

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad C^* &= 7,05 + 0,15 P^* + 0,87 (W_1^* + W_2^*) + 0,1 P_{-1}^* \\
 &\quad 6,09 \quad 0,15 \quad 0,89 \quad 0,06 \\
 &\quad 5,07 \quad 0,14 \quad 0,92 \quad 0,03 \\
 I^* &= -4,79 + 0,68 P^* + 0,21 P_{-1}^* + 0,0 K_{-1}^* \\
 &\quad -1,40 \quad 0,52 \quad 0,33 \quad -0,02 \\
 &\quad 0,67 \quad 0,49 \quad 0,35 \quad -0,04 \\
 W_1^* &= 3,82 + 0,44 X^* + 0,21 X_{-1}^* - 0,01 (t-1931) \\
 &\quad 3,92 \quad 0,43 \quad 0,21 \quad -0,01 \\
 &\quad 3,73 \quad 0,43 \quad 0,21 \quad -0,03
 \end{aligned}$$

Unterstellt man keine Veränderung der exogenen Variablen des Grundmodells, ergeben sich folgende Zukunftswerte für die Variablen des Schätzmodells:

(4.11)

| Variable     | C*   | I*  | W <sub>1</sub> * | X*   | P*  | K*    | G*   | W <sub>2</sub> * | T*   |
|--------------|------|-----|------------------|------|-----|-------|------|------------------|------|
| Zukunftswert | 54,9 | 3,3 | 46,1             | 63,7 | 6,6 | 167,2 | 15,C | 9,5              | 11,0 |

Die folgende Tabelle zeigt dagegen die prognostizierten Zukunftswerte der endogenen Variablen des Schätzmodells:

(4.12)

|      | C*   | I*   | W*   | X*   | P*  | K*    |
|------|------|------|------|------|-----|-------|
| DLS  | 52,3 | -0,4 | 41,0 | 57,4 | 5,4 | 163,6 |
| OLS  | 57,7 | 3,5  | 46,3 | 66,7 | 9,4 | 167,5 |
| TSLS | 56,8 | 2,0  | 45,3 | 64,3 | 8,0 | 166,0 |
| 3SLS | 56,6 | 1,2  | 44,6 | 63,2 | 7,5 | 165,2 |

In diesem speziellen Durchgang werden die endogenen Zukunftswerte von DLS durchgehend unter-, von OLS überschätzt. TSLS und 3SLS überschätzen ebenfalls alle Zukunftswerte außer den Investitionen.

Natürlich darf man aus diesem einen Durchgang keine Schlüsse ziehen. Tabelle (4.13) gibt aber an, wie oft in 99 Durchgängen prognostizierte und tatsächliche Wachstumsrate weniger als 5% Abweichung aufwiesen:<sup>1</sup>

(4.13)

|      | C* | W* | X* | K* |
|------|----|----|----|----|
| OLS  | 22 | 26 | 16 | 46 |
| TSLS | 35 | 35 | 23 | 53 |
| 3SLS | 33 | 31 | 21 | 51 |

Nach Division durch 99 erhält man offenbar eine Schätzung für das Effizienzkriterium (4.4) mit  $c = 0.05$ .

Wegen geringer Absolutgröße von Investitionen und Gewinnen ergaben sich große Schwankungen der tatsächlichen Wachstumsraten, die dann auch von keinem Verfahren hinreichend genau vorausgesagt wurden. Deswegen wird hier wie im folgenden auf die Wiedergabe dieser Prognoseergebnisse verzichtet. Als Ersatzgröße für die Treffergenauigkeit bei den Investitionen mögen die Prognoseergebnisse für den Kapitalstock gelten. Wir möchten aber darauf hinweisen, daß die schlechte Prognosequalität für  $P^*$  und  $I^*$  einzig auf das hier gewählte Effizienzkriterium zurückgeführt werden muß. Bei gleichen absoluten Abweichungen von prognostizierten und wahren Werten werden Wachstumsraten von  $P^*$  und  $I^*$  erheblich schlechter vorausgesagt.

Da wir weiterhin zunächst nur Strukturschätzverfahren untereinander vergleichen wollen, werden wir erst am Ende dieses Abschnitts eine Gegenüberstellung von DLS und anderen Verfahren vornehmen.

---

<sup>1</sup> Ein Durchgang mußte abgebrochen werden, da sich die geschätzte Strukturmatrix  $\hat{\Gamma}$  für ein Verfahren als singulär erwies.

Um die Abhängigkeit obiger Ergebnisse von den Zukunftswerten der exogenen Variablen des Grundmodells zu untersuchen, wurde in jedem Durchgang zusätzlich mit willkürlich gewählten Werten dieser Variablen prognostiziert. So wurden z. B. Staatsausgaben und -einnahmen geringfügig kleiner angenommen als in der letzten Periode des Schätzzeitraums.

Tabelle (4.14) gibt das Ergebnis wieder:

|        |      |    |            |    |    |
|--------|------|----|------------|----|----|
| (4.14) |      | C* | $\gamma^*$ | X* | K* |
|        | OLS  | 22 | 25         | 14 | 45 |
|        | TSLs | 34 | 32         | 22 | 55 |
|        | 3SLS | 31 | 28         | 16 | 48 |

Zusätzlich zu  $c = 0.05$  wurden in allen Durchgängen auch Abweichungen von weniger als 1% gezählt. Diese Treffergenauigkeit wurde von allen Verfahren aber so selten erreicht - meistens weniger als 5-mal -, daß eine Diskriminierung zwischen den Verfahren unmöglich ist und wir deshalb auf eine Wiedergabe der entsprechenden Tabellen verzichten. In anderen Experimenten, wo die Anpassung von Schätz- an Grundmodell besser ist, werden wir jedoch auch diese Ergebnisse vorstellen.

Die Tabellen (4.13) und (4.14) dürfen nicht zu zwei sich hier möglicherweise aufdrängenden voreiligen Schlußfolgerungen verleiten. Einmal scheinen obige Tabellen auf eine gleichmäßige Unterlegenheit von OLS hinzudeuten. Dieser Schluß ist jedoch verfrüht, denn in anderen Experimenten wird sich eine genau umgekehrte Situation ergeben. Zum anderen darf man nicht die Eigenschaft obiger Tabellen verallgemeinern, daß ein bestimmtes Verfahren - hier TSLs- gleichmäßig für alle endogenen Variablen beste Prognosen liefert. Wir werden vielmehr später die Situation vorfinden, daß ein Verfahren für eine gewisse endogene Variable die besten und für eine andere die mit Abstand schlechtesten Prognosen liefert. Ein in anderen Tabellen wiederkehrendes Phänomen ist dagegen die sich oben andeutende Unterlegenheit von 3SLS gegenüber TSLs.

## 2. Experiment

Das Grundmodell bleibt mit Ausnahme geringfügiger Koeffizienten-änderungen (Verkleinerung des Koeffizienten von  $H_{-1}$  in der Vorratsgleichung) unverändert. Als Schätzmodell dient dagegen das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad C^* &= \alpha_0 + \alpha_1 P^* + \alpha_2 (W_1^* + W_2^*) + \alpha_3 C_{-1}^* \\
 I^* &= \beta_0 + \beta_1 P^* + \beta_2 P_{-1}^* + \beta_3 i \\
 W_1^* &= \gamma_0 + \gamma_1 X^* \\
 X^* &= C^* + I^* + G^* - W_2^* \\
 P^* &= X^* - W_1^* - T^* \\
 K^* &= K_{-1}^* + I^*
 \end{aligned}$$

Die Umformung der Variablen geschieht wie in (4.8).

Hier die zu (4.13) und (4.14) analogen Tabellen:

| (4.16) |      | $C^*$ | $W^*$ | $X^*$ | $K^*$ |
|--------|------|-------|-------|-------|-------|
|        | OLS  | 36    | 31    | 17    | 77    |
|        | TSLS | 43    | 33    | 21    | 80    |
|        | 3SLS | 43    | 32    | 18    | 80    |

| (4.17) |      | $C^*$ | $W^*$ | $X^*$ | $K^*$ |
|--------|------|-------|-------|-------|-------|
|        | OLS  | 35    | 32    | 17    | 79    |
|        | TSLS | 47    | 33    | 19    | 82    |
|        | 3SLS | 42    | 30    | 18    | 83    |

Gegenüber dem vorigen Experiment ergibt sich ein kaum verändertes Bild. Lediglich das allgemeine Niveau der Prognosen ist besser geworden, was auf die bessere Prognoseeignung des Systems (4.15) bei Vorliegen des Grundmodells (4.5) zurückzuführen ist.

### 3. Experiment

Als Grundmodell wird hier eine Variante des bekannten Modells von Klein und Goldberger verwendet.<sup>1</sup> Aus den gleichen Gründen wie in den ersten Experimenten wird jedoch auch hier der monetäre Sektor weggelassen.

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad C &= -22 + 0,6(W_1 + W_2 - T_W) + 0,4(P - T_C - T_N - S_C) + 0,3R^* + 0,3E_{-1} + 0,3N_F + u_1 \\
 I &= -17 + 0,8(P - T_C - T_N)_{-1} + 0,8R^*_{-1} + 0,8D_{-1} - 0,07K_{-1} + u_2 \\
 W_1 &= -1,4 + 0,2X + 0,2X_{-1} + 0,3(t - 1929) + u_3 \\
 D &= 7,3 + 0,05K + 0,05K_{-1} + 0,04X + u_4 \\
 X &= -26 + 2,3N_W + 2(t - 1929) + 0,7h - 2,37N_G + 2,2N_E + 0,08K_{-1} + u_5 \\
 F_i &= 0,8F_{i-1} + 0,006(W_1 + W_2 - T_W) + 0,006(P - T_C - T_N) + 0,006R^* + u_6 \\
 S_C &= -3,5 + 0,7(P_C - T_C) + 0,08(P_C - T_C)_{-1} - 0,08S_{C-1} - 0,028S_{B-1} + u_7 \\
 P_C &= -7,6 + 0,7P + u_8 \\
 K &= K_{-1} + I - D \\
 S_P &= S_{B-1} + S_C \\
 P &= X - W - R^* - T_R - T_E - D \\
 X &= C + I + G + F_e - F_i
 \end{aligned}$$

Alle linksseitigen Variablen sind endogen, zusätzlich  $F_e$ , da  $X$  zweimal auf der linken Seite erscheint.

Die Bedeutung der Variablen ist wie folgt:<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Siehe Klein, L. R. und Goldberger, A. S., An Econometric Model of the United States 1929-1952, Amsterdam 1955.

<sup>2</sup> Nur aufgelistet, falls von (4.6) verschieden oder dort nicht definiert. Die Symbole sind die gleichen wie in Theil, H., Principles of Econometrics, a. a. O., S. 476. Dort sind auch die verwendeten Maßeinheiten erläutert.

- (4.19) C : Privater Konsum  
I : Private Bruttoinvestitionen  
D : Abschreibungen  
X : Private Bruttoproduktion  
 $F_i$  : Importe  
 $F_e$  : Exporte  
 $S_c$  : Ersparnis der Unternehmen  
 $S_B$  : Kumulierte Ersparnisse der Unternehmen  
 $P_C$  : Unternehmensgewinne  
P : Einkommen aus selbständiger nichtlandwirtschaftl. Arbeit  
R : Verfügbares Einkommen aus landwirtschaftl. Arbeit  
 $N_P$  : Gesamtbevölkerung  
 $N_w$  : Beschäftigte im privaten Sektor  
 $N_G$  : Staatsbedienstete  
 $N_E$  : Unternehmer  
h : Anzahl der geleisteten Arbeitsstunden  
 $T_C$  : Steuern auf Unternehmensgewinne  
 $T_E$  : Indirekte Steuern minus Subventionen  
 $T_w$  : Lohnsteuer  
 $T_R$  : Steuer auf Einkommen aus landwirtschaftl. Tätigkeit  
 $T_N$  : Übrige Steuern

Wie im ersten Grundmodell liegen auch hier 8 stochastische Strukturgleichungen vor, aber die Wirtschaft wird hier sozusagen durch eine andere Brille betrachtet. Das Investitions- und Konsumverhalten wird aggregierter gesehen als in (4.5), während der Unternehmenssektor erheblich detaillierter dargestellt und in diesem Zusammenhang eine Vielzahl neuer Variablen eingeführt wird. Neu ist auch die gesonderte Betrachtung von Ex- und Importen. Der Zins dagegen kommt nicht mehr als Variable vor.

Als Schätzmodell verwenden wir wieder (4.7), das Modell I von Klein. Abweichend von (4.8) sind nun folgende Umformungen nötig:

$$\begin{aligned}
 (4.20) \quad C^* &= C \\
 I^* &= I - D \\
 X^* &= X - D \\
 P^* &= P + P^* - T_P \\
 T^* &= T_E \\
 G^* &= G + F_e - F_i
 \end{aligned}$$

Hier tritt zum ersten Mal das Phänomen auf, daß eine exogene Variable des Schätzmodells zu Unrecht als solche angesehen wird. Wegen  $G^* = G + F_e - F_i$  sind die Staatsausgaben im Schätzmodell keine echte exogene Variable mehr.

Die Varianzen und Autokorrelationskoeffizienten der  $u_i$  sind aus folgender Tabelle zu entnehmen:<sup>1</sup>

| (4.21)  | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Varianz | 1     | 3     | 1     | 0,2   | 3     | 0,5   | 1     | 1     |
| Korr.K. | 0,2   | 0,2   | 0,2   | 0,8   | 0,5   | 0,7   | 0,3   | 0,3   |

Die folgenden Tabellen geben die Anzahl von Prognoseabweichungen von weniger als 1% bei 100 Durchgängen an. Daraus ist schon zu ersehen, daß die jetzt vorliegende Kombination von Grund- und Schätzmodell generell erheblich bessere Prognosen ermöglicht. Die Abweichungen für  $c = 0,05$  wurden ebenfalls gezählt, aber die Abweichungen zwischen prognostizierten und tatsächlichen Wachstumsraten blieben in fast allen Durchgängen und für alle Verfahren innerhalb dieser Grenze, so daß mangels Informationsgehalt eine Wiedergabe der Werte hier unterbleibt.

Im Grundmodell wurden als exogene Zukunftswerte einmal unveränderte und einmal Trendwerte eingesetzt.

---

<sup>1</sup> Auch hier wurde mit anderen Werten experimentiert, ohne daß die Ergebnisse sich wesentlich änderten.

| (4.22) |      | C* | W* | X* | K* |
|--------|------|----|----|----|----|
|        | OLS  | 39 | 67 | 28 | 43 |
|        | TSLs | 28 | 66 | 21 | 42 |
|        | 3SLS | 20 | 67 | 15 | 42 |

| (4.23) |      | C* | W* | X* | K* |
|--------|------|----|----|----|----|
|        | OLS  | 40 | 65 | 20 | 27 |
|        | TSLs | 29 | 65 | 14 | 30 |
|        | 3SLS | 24 | 69 | 13 | 25 |

Wie man sieht liefert OLS jetzt in fast allen Fällen die besten Prognosen. Die Rangfolge der Verfahren ist jedoch nicht für alle endogenen Variablen gleich. So schneidet 3SLS in Tabelle (4.23) bei der Prognose von  $W^*$  am besten und für alle anderen Variablen am schlechtesten ab.

#### 4. Experiment

Das Schätzmodell bleibt unverändert.

Ebenso bleibt auch das Grundmodell unverändert, mit folgenden Annahmen:

Die Steuervariablen  $T_C$ ,  $T_E$ ,  $T_N$  und  $T_w$  werden endogenisiert, wodurch 4 neue stochastische Strukturgleichungen entstehen mit allerdings nur geringen Varianzen für die Störgrößen. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind wie in Theil, H., Principles of Econometrics, a. a. O., S. 481.

Die Gleichung für die private Bruttoproduktion entfällt. Stattdessen wird  $X$  durch die letzte Gleichung in (4.18) bestimmt und  $F_e$  als exogen betrachtet.

Die folgenden Tabellen geben die Anzahl von 1% - Abweichungen bei Trendwerten bzw. geringfügig gesenkten Werten der exogenen ZukunftsvARIABLEN an:

| (4, 24) |      | C* | W* | X* | K* |
|---------|------|----|----|----|----|
|         | OLS  | 14 | 34 | 19 | 18 |
|         | TSLs | 21 | 34 | 25 | 17 |
|         | 3SLS | 21 | 29 | 21 | 18 |

| (4, 25) |      | C* | V* | X* | K* |
|---------|------|----|----|----|----|
|         | OLS  | 19 | 27 | 25 | 16 |
|         | TSLs | 16 | 26 | 19 | 14 |
|         | 3SLS | 12 | 27 | 18 | 19 |

Auch hier kann man beobachten, daß Verfahren -und zwar alle drei- für gewisse endogene Variable die besten und für andere die schlechtesten Prognosen liefern. So prognostiziert OLS in (4, 24) den Konsum am schlechtesten, die private Lohnsumme und den Kapitalstock zusammen mit TSLs am besten. Analoges gilt für TSLs und 3SLS.

Resümierend kommentieren wir die Ergebnisse der hier vorgestellten Experimente wie folgt:

Es existiert kein gleichmäßig bestes Schätzverfahren. Sogar bei gegebenem Experiment erhält man unterschiedliche Rangfolgen je nach endogener Variabler.

Es existieren keine ausgeprägten Differenzen in den Prognosequalitäten der Verfahren. Unterschiede in der Güte der Schätzergebnisse sind vielmehr auf andere Faktoren zurückzuführen, vor allem auf die Wahl des Schätzmodells bei gegebenem Grundmodell. Ebenso hängt die Qualität der Prognose sehr davon ab, welche endogene Variable

man prognostiziert. Die Zukunftswerte der exogenen Variablen und die Varianz- und Korrelationsstruktur der Störgrößen scheinen die Ergebnisse dagegen weniger zu beeinflussen.<sup>1</sup>

Ein gewisses in allen Experimenten -auch den hier nicht besprochenen- durchscheinendes Muster tritt in der Überlegenheit von OLS zutage, wenn in Wahrheit endogene Variable als exogen betrachtet werden. Dies war z. B. in den letzten beiden Experimenten der Fall, wo man ein vergleichsweise gutes Abschneiden von OLS beobachten konnte. Daß "more elaborate methods" in praxisnahen Situationen nicht notwendig zu besseren Schätzergebnissen führen, tritt sehr deutlich beim Vergleich von TSLS und 3SLS zutage. In fast allen Experimenten war hier das einfachere Verfahren -TSLS- überlegen. Insgesamt scheinen die bis hier vorgeführten Experimente eine Klassifizierung zu rechtfertigen mit OLS und TSLS gemeinsam an erster und 3SLS an letzter Stelle.

Wir wollen hier jedoch nicht in den weiter oben angeprangerten Fehler der unzulässigen Verallgemeinerung von Simulationsergebnissen verfallen und für unsere Ergebnisse eine ihnen möglicherweise nicht zukommende allgemeine Aussagekraft beanspruchen. Wir möchten sie lediglich als Bestätigung unserer eingangs dieser Arbeit aufgestellten Hypothese aufgefaßt sehen, daß eine immer fortschreitende Verfeinerung von Methoden in praktischen Anwendungen keine Verbesserung der Ergebnisse mit sich bringt und daß Autoren, die bislang ihre Systeme mit OLS geschätzt haben, dies auch weiterhin ohne schlechtes Gewissen tun dürfen.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Exogene Zukunftswerte hatten nur dann keinen Einfluß, wenn sie nicht zu sehr vom Trend abwichen. Andernfalls wurden die Ergebnisse für alle Verfahren gleichmäßig schlecht mit Ausnahme von DLS, worauf wir weiter unten zu sprechen kommen. Auch die Varianz der Störgrößen beeinflusste nur die absolute, aber nicht die relative Qualität der Verfahren.

<sup>2</sup> Ein solches Beispiel für schlechtes Gewissen findet man etwa bei Dieckheuer, G., "Realeinkommens-, Preis- und Zinseffekte der Fiskalpolitik, untersucht mit einem ökonometrischen Modell für die Bundesrepublik Deutschland", Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 132, 1976, 422-470.

Am Ende dieses Abschnitts die angekündigte Gegenüberstellung von DLS und Strukturschätzverfahren.

Dieser Vergleich wurde -zumindest in den oben betrachteten Experimenten- eindeutig zugunsten von DLS entschieden. DLS hat sich mit einer Ausnahme als so gleichmäßig überlegen erwiesen, daß wir im folgenden zum Vergleich nur das jeweils beste Strukturschätzverfahren heranziehen. Zusätzlich summieren wir die erzielten "Treffer" über die vier betrachteten endogenen Variablen, um das Hauptergebnis nicht in unnötigem Detail zu ertränken. Maximal sind damit im ersten Experiment 396, in den übrigen 400 "Treffer" möglich.

| (4.26)      | DLS | bestes Struktur-<br>schätzverfahren |
|-------------|-----|-------------------------------------|
| 1. Exper.   |     |                                     |
| Tab. (4.13) | 209 | 146 (TSLS)                          |
| Tab. (4.14) | 97  | 143 "                               |
| 2. Exper.   |     |                                     |
| Tab. (4.16) | 221 | 176 (TSLS)                          |
| Tab. (4.17) | 239 | 181 "                               |
| 3. Exper.   |     |                                     |
| Tab. (4.22) | 240 | 177 (OLS)                           |
| Tab. (4.23) | 229 | 202 "                               |
| 4. Exper.   |     |                                     |
| Tab. (4.24) | 108 | 97 (TSLS)                           |
| Tab. (4.25) | 93  | 87 (OLS)                            |

Tabelle (4.26) scheint unsere Hypothese zu bestätigen, daß bei der Schätzung der reduzierten Form falsche Restriktionen mehr Schaden anrichten als garkeine. Mit einer Ausnahme ist DLS in allen Experimenten dem jeweils besten Strukturschätzverfahren eindeutig überlegen.

Leider setzt sich diese Serie in anderen Experimenten nicht in dieser Eindeutigkeit fort. So ergaben zwar auch die Experimente, über die wir im nächsten Abschnitt berichten, in den meisten Fällen eine Überlegenheit von DLS gegenüber Strukturschätzungen, aber häufig schnitt DLS auch mit Abstand am schlechtesten ab. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

e) Varianzanalytische Betrachtung der Trefferquoten

Als ein Ergebnis des letzten Abschnitts hatten wir den nur geringfügigen Einfluß von Schätzverfahren auf die Prognosequalität festgehalten verglichen mit den Auswirkungen, die Variationen anderer Faktoren mit sich brachten. Des weiteren können wir die Hypothese der Gleichberechtigung von OLS als hinreichend bestätigt betrachten, so daß wir uns nun der Frage zuwenden, welcher Einfluß prinzipiell von der Wahl des Schätzverfahrens ausgeht auf den Wert unseres Effizienzkriteriums verglichen mit anderen Faktoren, die dieses ebenfalls beeinflussen.

Offenbar hängt der empirisch ermittelte Wert des Kriteriums (4.4) von den folgenden Faktoren  $i, j, \dots, o$  ab:

- i : Das als Grundmodell dienende Gleichungssystem
- j : Das diesem angepaßte Schätzmodell
- k : Das verwendete Schätzverfahren
- l : Die Zukunftswerte der exogenen Variablen des Grundmodells
- m : Die prognostizierte endogene Variable
- n : Die Größe von c
- o : Die Varianz- und Korrelationsstruktur der Störgrößen

Wir interessieren uns vor allem für die relative Bedeutung der Faktoren j und k, Modell und Methode, bei festen Ausprägungen der übrigen Faktoren. Hier lautet unsere Hypothese, daß bei gegebenen Werten der übrigen Faktoren, speziell einer in der Praxis immer gegebenen unserem Grundmodell entsprechenden ökonomischen Situation, die Auswahl eines geeigneten Modells die Qualität der Ergebnisse erheblich mehr beeinflußt als der eher technische Vorgang der Anpassung dieses Modells an vorgefundene Daten.

Zur empirischen Überprüfung dieser Hypothese wurden obige Faktoren wie folgt systematisch variiert:

Der Faktor  $i$  hat in allen Experimenten die Ausprägung (4.5). Auch der Faktor  $o$ , die Varianz- und Korrelationsstruktur der Störvariablen, hat im folgenden immer die gleiche Ausprägung wie im ersten Experiment. Dagegen wird der Faktor  $j$ , das bei der Schätzung zugrundegelegte Modell, nunmehr in 8 verschiedenen Ausprägungen untersucht, die gegeben sind wie folgt:

(4.27)

$$C^k = a_0 + a_1 Y + a_2 C_{-1}^k$$

$$I^k = b_0 + b_1 Y_{-1} + b_2 Y_{-2}$$

$$Y = C^k + I^k + G^k - T$$

Man hat also ein Modell mit zwei stochastischen Strukturgleichungen, wobei die Investitionsgleichung bereits in reduzierter Form vorliegt. Die Variablen  $T$  und  $Y$  haben die gleiche Bedeutung wie in (4.5), während die Bedeutung von  $C^k$ ,  $I^k$  und  $G^k$  nach folgender Tabelle variiert:

(4.28)

| Nr. des Modells | $C^k$       | $I^k$                           | Definition von $G^k$                  |
|-----------------|-------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1               | $C_1$       | $I$                             | $G + C_2 + H + D_1 + D_2 + D_3 - D''$ |
| 2               | $C_1$       | $I + H$                         | $G + C_2 + D_1 + D_2 + D_3 - D''$     |
| 3               | $C_1$       | $I + H + D_1 + D_2 + D_3 - D''$ | $G + C_2$                             |
| 4               | $C_1 + C_2$ | $I$                             | $G + H + D_1 + D_2 + D_3 - D'$        |
| 5               | $C_1 + C_2$ | $I + H$                         | $G + D_1 + D_2 + D_3 - D$             |
| 6               | $C_1 + C_2$ | $I + H + D_1 + D_2 + D_3 - D''$ | $G$                                   |

Durch unterschiedliche Definition von  $C^k$ ,  $I^k$  und  $G^k$  sind also 6 verschiedene Modelle gegeben, wobei in allen außer in Modell 6 die Variable  $G^k$  zu Unrecht als exogen behandelt wird.

Das siebte Modell ist durch das System (4.7) gegeben und das achte Modell ist das folgende ebenfalls aus drei stochastischen Strukturgleichungen bestehende Gleichungssystem:

(4.29)

$$C_1 = a_0 + a_1(W_1 + W_2) + a_2P + a_3C_{1-1}$$

$$I^* = b_0 + b_1P + b_2Y_{-1}$$

$$W_1 = c_0 + c_1Y + c_2Y_{-1}$$

$$Y = C_1 + C_2 + I^* + D_1 + D_2 + D_3 + G - D^* - T$$

$$P = Y - W_1 - W_2 - G$$

Auch hier haben alle Variablen die gleiche Bedeutung wie in (4.5), außer  $I^*$ , das definiert ist wie in Modell 5.

Der Faktor  $k$  = Schätzverfahren hat die Ausprägungen OLS, TSLS und 3SLS. Ebenfalls drei Ausprägungen hat der Faktor  $l$ . In jedem Experiment wird bei unveränderten, leicht gesenkten und tatsächlichen Zukunftswerten der exogenen Variablen des Grundmodells prognostiziert.<sup>1</sup> Bezüglich des Faktors  $m$  werden nur die Variablen  $Y$  (bzw.  $X$  in Modell 7) und  $C$  bzw.  $C_1$  untersucht, da diese als einzige in allen Schätzmodellen vorkommen.<sup>2</sup> Für  $c$  werden die Werte 3% und 5% zugelassen, so daß man insgesamt  $8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 288$  mögliche Faktorkombinationen erhält.

Pro Faktorkombination wurden 100 Prognosen erstellt, allerdings nicht unabhängig voneinander. Vielmehr wurde nur für jedes Schätzmodell ein gesondertes Experiment durchgeführt, innerhalb dessen die Trefferquoten der restlichen Faktorkombinationen gleichzeitig beobachtet wurden.

<sup>1</sup> Entnommen aus Klein, L. R., Economic Fluctuations..., a. a. O. S. 143ff.

<sup>2</sup> und natürlich  $I$ , das aber wegen der auf Seite 69 angegebenen Gründe nicht berücksichtigt wird.

Aus Platz- und Übersichtsgründen wollen wir im folgenden nur eine -zugegebenermaßen willkürliche- Auswahl der 288 beobachteten Trefferquoten angeben. Zum einen ergeben die hier nicht abgedruckten Ergebnisse ein vollkommen analoges Bild und zum anderen soll die eigentliche Auswertung der Experimente erst weiter unten in Tabelle (4.31) erfolgen.

Die folgende Tabelle gibt daher nur die Trefferquoten für Y und C an, wenn für den Faktor "Zukunftswerte der exogenen Variablen" die von Klein angegebenen Zahlen und für c der Wert 3% festgehalten werden.

(4.30)

| Methode | Modell |    |    |    |    |    |    |    |   |
|---------|--------|----|----|----|----|----|----|----|---|
|         | 1      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |   |
| OLS     | 31     | 35 | 39 | 27 | 25 | 26 | 13 | 26 | Y |
| TSLs    | 32     | 36 | 34 | 27 | 24 | 25 | 16 | 29 |   |
| 3SLS    | 29     | 36 | 38 | 25 | 23 | 23 | 15 | 24 |   |
| OLS     | 59     | 68 | 68 | 47 | 45 | 36 | 19 | 46 | C |
| TSLs    | 63     | 65 | 62 | 46 | 45 | 45 | 29 | 46 |   |
| 3SLS    | 65     | 63 | 60 | 46 | 46 | 47 | 28 | 45 |   |

Tabelle (4.30) bestätigt mehr oder weniger die Ergebnisse des vorigen Abschnitts: Die Unterschiede zwischen den Schätzverfahren sind minimal und eine eindeutige Rangfolge ist nicht auszumachen. Vielmehr variiert die Rangfolge von Experiment zu Experiment und sogar bei gegebenem Experiment ist je nach betrachteter endogener Variabler ein anderes Verfahren optimal. Unterschiede in der Prognosequalität sind mehr auf die übrigen auf Seite 79 aufgelisteten Faktoren als auf das gewählte Schätzverfahren zurückzuführen.

Man beachte weiter, daß OLS vor allem bei fälschlicher Betrachtung einer endogenen Variablen als exogen -in den Modellen 1, 2, 3, 4, 5 und 8- gute Prognosen liefert.

Die Untersuchung eines weiteren Aspektes lieferte dagegen keine schlüssigen Resultate. Bei Betrachtung von Tabelle (4.28) stellt man

nämlich fest, daß die Modelle 1 - 6 bezüglich des Aggregationsgrades der Variablen  $C^*$  und  $I^*$  eine teilgeordnete Menge bilden mit den Modellen 1, 2, 3, 6 und 1, 4, 5, 6 als vollständig geordneten Teilmengen. Teilt man nun auch bei gegebenem Modell den Schätzverfahren Ränge zu, so kann man hoffen, durch Berechnung von Rangkorrelationskoeffizienten einen eventuell vorhandenen systematischen Zusammenhang zwischen Aggregationsgrad und relativer Qualität der Schätzverfahren zu entdecken. Dies wurde auf mehrer Arten versucht, ohne daß ein eindeutiges Muster sichtbar wurde.

Ebenfalls ohne schlüssiges Ergebnis blieb die Untersuchung der Prognosequalität von DLS. Wie schon im vorigen Abschnitt hatte sich DLS in den meisten Fällen den Strukturschätzungen überlegen gezeigt, aber zuweilen waren auch ernste "Ausrutscher" zu beobachten. Da wir zur Zeit dafür noch keine Erklärung haben, wird auf die Wiedergabe der Ergebnisse hier verzichtet.

Nun zum eigentlichen Anlaß der in diesem Abschnitt beschriebenen Experimente, der Zerlegung der Trefferquotenvariabilität nach Faktoren, die dafür verantwortlich sind.

Als arithmetisches Mittel aller 288 Trefferquoten ergab sich 47,15 und als Wert für die Varianz der Trefferquoten um dieses Mittel die Zahl 111 104. Die folgende Tabelle, die die Ergebnisse der in diesem Unterkapitel vorgestellten Zufallsexperimente zusammenfaßt, gibt nun die die Aufteilung der Varianz auf die verschiedenen Faktoren an:

(4.31)

| Faktor                                 | Prozentsatz der von diesem Faktor erkl. Varianz |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Modell                                 | 25 %                                            |
| Methode                                | 1 %                                             |
| Zukunftswert der<br>exogenen Variablen | 1 %                                             |
| prognostizierte<br>endogene Variable   | 37 %                                            |
| c                                      | 27 %                                            |
| unerklärt                              | 9 %                                             |

Zunächst muß man zu dieser Tabelle bemerken, daß nur die den Faktoren "Modell" und "Methode" zuzuordnenden Varianzanteile von Interesse sind. Wie aber aus der Theorie des experimental design bekannt, ist in Zufalls- und anderen Experimenten auch die Variation an sich nicht interessierender Faktoren sinnvoll, um die relativen Auswirkungen der im Brennpunkt stehenden Einflußgrößen über ein breiteres Spektrum zu verfolgen.

Nach dieser Vorbemerkung bleibt als Hauptergebnis dieses Abschnitts festzuhalten, daß die Wahl eines Modells die Qualität der Prognose-ergebnisse 25-mal mehr beeinflußt als das zur Anpassung verwendete Schätzverfahren!

Ein Wort der Vorsicht ist geboten wegen des hier verwendeten Qualitätskriteriums. Wegen  $Y = C^* + I^* + G^* - T$  und je nach Modell verschiedener Größe von  $G^* - T$  wird z. B. in Modell 1 ein größerer Anteil von  $Y$  bei der Prognose als bekannt vorausgesetzt als in Modell 6. Wenn auch dieser Effekt für einen gewissen Anteil der auf das Modell zurückgeführten Varianz verantwortlich ist, bleibt als wichtigstes Fazit dennoch die überragende Bedeutung des Faktors "Modell" für die Qualität empirischer ökonometrischer Forschung bestehen.

## 5. Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit empirisch gewonnenen Ergebnisse können als Bestätigung der eingangs formulierten Hypothese gewertet werden, daß die Verwendung aufwendiger Schätzverfahren in realitätsnahen Situationen nicht notwendig eine Verbesserung der Resultate mit sich bringt. Vor allem Tabelle (4, 31) macht diese überdeutlich. Zu den Faktoren, die in praktischen ökonometrischen Anwendungen die Güte der Realitätserfassung vor allem bestimmen, gehören nicht die dabei verwendeten Methoden. Insofern kann man diese Arbeit als Rehabilitation des einfachsten in solchen Situationen sinnvoll anwendbaren Verfahrens, der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate, begreifen.

Diese Arbeit soll somit, um die wesentliche Aussage in einem Satz zu komprimieren, als Aufforderung verstanden werden, den Fortschritt in der Ökonometrie nicht in der Konstruktion immer komplizierterer Methoden, sondern in der Ausarbeitung realitätsgerechterer Modelle zu suchen. Zur Illustration haben wir für den Fall simultaner Gleichungssysteme gezeigt, daß die Methode der kleinsten Quadrate den zum Teil beträchtlich aufwendigeren Konkurrenzverfahren durchaus ebenbürtig ist.

Zum Abschluß sei, um den Bogen zu schließen, ein weiterer Großer unseres Fachs zitiert, Lawrence Klein, der seine Meinung in diesem Zusammenhang wie folgt formuliert:<sup>1</sup>

"The building of institutional reality into a priori formulations of economic relationships and the refinement of basic data collection have contributed much more to the improvement of empirical econometric results than have more elaborate methods of statistical inference."

---

<sup>1</sup> Klein, L. R., "Single Equation ...", a. a. O., S. 870.

A N H A N G

a) Die gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Methode im klassischen Regressionsmodell mit korrelierten Störgrößen

Im folgenden werden einige analytisch abgeleitete Ergebnisse über die relative Qualität von OLS im klassischen Regressionsmodell mit korrelierten Störgrößen diskutiert. Die Bedeutung dieses Modells für simultane Gleichungssysteme wurde bereits genannt: Deren reduzierte Form genügt vielfach den Bedingungen des Modells.

Ohne jedoch darauf im folgenden explizit Bezug zu nehmen, unterstellen wir im weiteren abstrakt das wohlbekannte klassische lineare Modell

$$(A.1) \quad y = X\beta + u$$

mit einer festen, nichtstochastischen  $T \times K$ -Matrix  $X$ , einem unbekannten  $K$ -dim. Vektor  $\beta$  von Regressionskoeffizienten und einem  $T$ -dim. latenten Zufallsvektor  $u$  mit Erwartungswert 0. Des weiteren setzen wir im folgenden immer vollen Rang von  $X$  und der Kovarianzmatrix  $V$  von  $u$  voraus.

Damit ist die OLS-Schätzung  $\hat{\beta}$  von  $\beta$  gegeben durch

$$(A.2) \quad \hat{\beta}(y) = (X'X)^{-1}X'y.$$

Für  $V = \sigma^2 I$  ist  $\hat{\beta}$  beste unter allen linearen und erwartungstreuen Schätzfunktionen für  $\beta$  (BLUE). Im folgenden wollen wir uns damit befassen, was im Fall  $V \neq \sigma^2 I$  geschieht.

Zunächst wird die BLUE-Rolle von OLS von dem Verfahren Gauss-Markov (GM) übernommen, von manchen Autoren auch als "Generalized Least Squares" oder "Aitken-Verfahren" bezeichnet. Die GM-Schätzung  $\tilde{\beta}$  von  $\beta$  ist gegeben durch

$$(A.3) \quad \tilde{\beta}(y) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y.$$

Zur Anwendung von GM muß  $V$  -zumindest bis auf ein konstantes Vielfaches- bekannt sein, was in der Praxis selten der Fall sein wird. Am Ende unserer Ausführungen werden wir kurz auf Verfahren eingehen, die ein geschätztes  $V$  in (A, 3) einsetzen. Zunächst wollen wir aber GM als Vergleichsmaßstab benutzen und die Frage stellen, wie schlecht OLS gegenüber GM höchstens werden kann.

Unter Beachtung der Tatsache, daß die qualitätsbestimmenden Eigenschaften von  $\hat{\beta}$  und  $\tilde{\beta}$  durch  $X$  und  $V$  eindeutig determiniert sind, wurde dieses Problem in der Literatur unter den folgenden drei Gesichtspunkten beleuchtet:

- i) Für welche Kombination von  $X$  und  $V$  liefern OLS und GM die gleiche Schätzfunktion, d. h. wann ist  $\hat{\beta}(y) = \tilde{\beta}(y)$  für alle  $y$ ?
- ii) Wie schlecht kann OLS höchstens werden bei gegebenem  $V$  und beliebigem  $X$ ?
- iii) Wie schlecht kann OLS höchstens werden bei gegebenem  $X$  und beliebigem  $V$ ?

zu i)

Dieser Aspekt hat in der Literatur eine recht gründliche Untersuchung erfahren.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Anderson, T. W., "On the Theory of Testing Serial Correlation", Skand. Aktuarietidskr. 31, 1948, 88-116.  
McElroy, F. W., "A Necessary and Sufficient Condition That Ordinarily Least Squares Estimators Be Best Linear Unbiased", JASA 62, 1967, 1302-1304.  
Zyskind, G., "On Canonical Forms, Non-Negative Covariance Matrices and Best and Simple Least Squares Estimators in Linear Models", AMS 38, 1967, 1092-1109.  
Kruskal, W., "When Are Gauss-Markov and Least Squares Estimators Identical? A Coordinate-Free Approach", AMS 39, 1968, 70-75.  
Zyskind, G., "Parametric Augmentations and Error Structures under which Certain Simple Least Squares and Analysis of Variance Procedures Are also Best", JASA 64, 1969, 1353-1368.  
Balestra, P., "On the Efficiency of Ordinary Least Squares in Regression Models", JASA 65, 1970, 1330-1336.

Dazu zunächst eine für alles weitere grundlegende Definition:

(A. 4)  $M :=$  Spaltenraum von  $X$

Unter Verwendung dieser Definition hat Kruskal -und unabhängig davon in äquivalenten Formulierungen Anderson und Zyskind(1967)- gezeigt:

$$(A. 5) \quad \hat{\beta}(y) \equiv \tilde{\beta}(y) \Leftrightarrow V(M) = M.$$

Hier können wir eine Verallgemeinerung beweisen, aus der die Aussage von Kruskal als einfaches Korollar folgt.<sup>1</sup> Sei dazu  $M^\perp$  das orthogonale Komplement von  $M$  und  $\oplus$  das Symbol für direkte Summe. Dann gilt:

$$(A. 6) \quad \hat{\beta}(y) = \tilde{\beta}(y) \Leftrightarrow y \in M \oplus (M^\perp \cap V(M^\perp)).$$

Beweis:

Sei  $R^T$  der Wertebereich von  $y$ . Man hat

$$R^T = M \oplus M^\perp = M \oplus V(M^\perp), \text{ da } V \text{ positiv definit.}$$

Sei  $\hat{P}$  Projektion auf  $M$  entlang  $M^\perp$ ,  $\tilde{P}$  Projektion auf  $M$  entlang  $V(M^\perp)$ .

Es gilt:

$$\hat{y} := X\hat{\beta} = \hat{P}(y) \text{ und } \tilde{y} := X\tilde{\beta} = \tilde{P}(y).$$

Wir zeigen nun Richtung " $\Rightarrow$ " der Behauptung.

$$\text{Sei also } \hat{\beta}(y) = \tilde{\beta}(y).$$

Es gilt:

$$y = y' + y^* \text{ mit } y' \in M, y^* \in M^\perp$$

$$\hat{P}(y) = y'$$

$$\tilde{P}(y) = y' + \tilde{P}(y^*)$$

Aber:

$$\hat{\beta}(y) = \tilde{\beta}(y) \Rightarrow \hat{P}(y) = \tilde{P}(y) \Rightarrow \tilde{P}(y^*) = 0 \Rightarrow y^* \in V(M^\perp) \Rightarrow y \in M \oplus (M^\perp \cap V(M^\perp)).$$

---

<sup>1</sup> Siehe dazu auch Krämer, W., Das Problem der Autokorrelation in ökonometrischen Modellen, Diplomarbeit, vorgelegt dem Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg Universität Mainz, 1976.

"  $\Leftarrow$  "

Sei  $y \in M \oplus (M^\perp \cap V(M^\perp))$ .

Dann  $y = y' \oplus y^*$  mit  $y' \in M$ ,  $y^* \in M^\perp \cap V(M^\perp)$ .

Also  $\hat{P}(y) = \tilde{P}(y)$ , woraus folgt:  $\hat{\beta}(y) = \tilde{\beta}(y)$ , q. e. d.

Der Satz von Kruskal ergibt sich jetzt als Korollar wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(y) = \tilde{\beta}(y) \text{ für alle } y &\Leftrightarrow M^\perp = M^\perp \cap V(M^\perp) \\ &\Leftrightarrow V(M^\perp) = M^\perp \\ &\Leftrightarrow V(M) = M \quad \text{da } V \text{ symmetrisch} \end{aligned}$$

Eine leicht variierte Fragestellung untersuchen Balestra, McElroy und Zyskind (1969). Sie fragen nach der Gestalt von  $V$ , damit für alle  $X$  aus einer bestimmten Klasse OLS und GM übereinstimmen.

So zeigt McElroy, daß OLS und GM genau dann für alle  $X$ -Matrizen übereinstimmen, deren erste Spalten nur aus Einsen bestehen, wenn  $V$  die folgende Gestalt besitzt:

$$(A. 7) \quad V = c \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 < c$$

Kovarianzmatrizen dieser und ähnlicher Gestalt werden zuweilen für die Störgrößen in Modellen postuliert, die Zeitreihen- mit Querschnittsdaten verbinden.<sup>1</sup> Somit hat man einen für praktische Anwendungen bedeutsamen Fall, in dem OLS trotz korrelierter Störgrößen BLUE-Schätzer ist.

<sup>1</sup> Siehe z. B. Wallace, T.D. und Hussain, A., "The Use of Error Components Models in Combining Cross Section with Time Series Data", *Econometrica* 37, 1969, 55-72.

zu ii)

Dieser Fall hat in der Literatur ebenfalls einige Beachtung gefunden.<sup>1</sup> Hier nur soviel: Unabhängig vom verwendeten Effizienzkriterium hat sich gezeigt, daß die jeweilige untere Schranke für die relative Effizienz von OLS bei gegebenem  $V$  vor allem von den Eigenwerten von  $V$  abhängt.

zu iii)

Diese Situation scheint für praktische Anwendungen die bedeutsamste zu sein. Dort ist  $V$  nur selten bekannt,  $X$  dagegen immer gegeben. Aussagen unter ii) nützen somit wenig. Was man braucht, sind Abschätzungen der Effizienz von OLS bei gegebenem  $X$  und unbekanntem  $V$ . Analog zu der unten skizzierten Vorgehensweise haben das Chipman und Chipman u. a. getan.<sup>2</sup> Allerdings werden dabei sehr spezielle  $X$ -Matrizen zugrundegelegt. Dafür sind die resultierenden Abschätzungen erheblich schärfer als die weiter unten in (A.13) angegebene Funktion. Zusätzlich wird in der Arbeit von Chipman ein abweichendes Effizienzkriterium gebraucht. Hier wird als Qualitätsmaßstab der Quotient der mittleren quadratischen Abweichungen von  $\tilde{y} := X\tilde{\beta}$  und  $\hat{y} := X\hat{\beta}$  verwendet, der, wie man sich leicht klarmacht, gegeben ist durch

$$(A.8) \quad e := \frac{\text{Spur KVM}(\tilde{y})}{\text{Spur KVM}(\hat{y})}.$$

Bei Verwendung dieses Kriteriums sieht man aber bald - worin möglicherweise der Grund für die Vernachlässigung dieses Themas in der Literatur zu suchen ist - daß bei gegebenem  $X$  eine positive untere Schranke für  $e$  nicht existiert, sofern man  $V$  über die Menge aller symmetrischen positiv definiten  $T \times T$ -Matrizen variieren läßt.

<sup>1</sup> Siehe z. B. Magness, T. A. und McGuire, J. B., "Comparison of Least Squares and Minimum Variance Estimators of Regression Parameters", AMS 33, 1962, 462-470 und Watson, G. S., "Linear Least Squares Regression", AMS 38, 1967, 1679-1699.

<sup>2</sup> Chipman, J. S., "Efficiency of Least Squares Estimation of Linear Trend when Residuals are Autocorrelated", Econometrica 47, 1979 (erscheint noch). Chipman, J. S., Kadiyala, K., Madansky, A. und Pratt, J. W., "Efficiency of the Sample Mean when Residuals Follow a First-Order Stationary Markoff Process", JASA 63, 1968, 1237-1246.

Nun ist in praktischen Anwendungen aber oft bekannt, daß  $V$  nur aus einer Teilmenge dieser Klasse stammen kann. So soll hier z. B. angenommen werden, daß die  $u_t$  einen stationären autoregressiven Prozeß erster Ordnung mit nichtnegativem Korrelationskoeffizienten bilden, d. h.  $V$  muß die folgende Gestalt besitzen:

$$(A.9) \quad V = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei steht  $\rho$  für den Korrelationskoeffizienten und  $\sigma^2$  für die Varianz der  $u_t$ .

Unter diesen Annahmen ist  $e$  eine stetige Funktion von  $\rho$  mit

$$(A.10) \quad 0 \leq e(\rho) \leq 1$$

für  $\rho \in [0, 1)$ .

Die Entscheidung über die Existenz einer positiven unteren Schranke für  $e$  hängt nun entscheidend von dem wie folgt definierten T-dim. Vektor  $z$  ab:

$$(A.11) \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt nämlich:

$$(A.12) \quad z \notin M \cup M^\perp \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 1} e(\rho) = 0$$

Zum Beweis weist man nach, daß der Zähler von (A.8) für  $\rho \rightarrow 1$  gegen 0, der Nenner aber nicht gegen 0 geht. Für Details verweisen wir auf Krämer, W., a. a. O., S. 17 ff.

Für ökonometrische Anwendungen wichtiger ist jedoch der Fall  $z \in M$ , da dies z. B. immer dann vorkommt, wenn die Regression ein Absolutglied enthält, also  $z$  selbst als Spalte von  $X$  erscheint. Hier kann man die folgende Abschätzung beweisen:

$$(A.13) \quad z \in M \Rightarrow e(\rho) \geq \frac{\frac{T(1-\rho^2)}{(T-2)\rho^2 - 2(T-1)\rho + T} + (K-1)\frac{1-\rho}{1+\rho}}{T - (T-K)\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

Für den recht umfangreichen Beweis dieses Satzes verweisen wir wiederum auf Krämer, W., a. a. O., S. 24 ff.

Aus (A.13) folgt insbesondere auch:

$$(A.14) \quad z \in M \Rightarrow \lim_{j \rightarrow 1} e(\rho) = 1$$

Zum Abschluß der angekündigte Vergleich von OLS mit sogenannten zweistufigen Verfahren, die in einem ersten Schritt  $\rho$  schätzen und dann über (A.9) das so gewonnene  $V$  in (A.3) einsetzen, Hier sind vor allem die Verfahren von Prais-Winsten und Durbin zu nennen.<sup>1</sup> Diese haben asymptotisch die gleiche Kovarianzmatrix wie GM, sind also in diesem Sinne OLS überlegen. Zum Qualitätsvergleich bei endlichen Stichproben ist man jedoch auch hier auf Monte Carlo Studien angewiesen.

In diesem Zusammenhang wird eine Arbeit von Griliches und Rao viel zitiert.<sup>2</sup> Diese Autoren kommen zu dem Ergebnis, daß für stark

<sup>1</sup> Für die Definitionen verweisen wir auf Johnston, J., a. a. O., 2. Aufl. S. 264.

<sup>2</sup> Griliches, Z. und Rao, P., "Small Sample Properties of Several Two-Stage Regression Methods in the Context of Autocorrelated Errors", JASA 64, 1969, 253-272.

korrelierte Störgrößen Zweistufen-Verfahren erheblich besser sind als OLS.

Im Licht von (A.14) erscheint dies überraschend, und in Krämer, W., a.a.O., S.29 ff wird gezeigt, daß dieses Ergebnis nur durch eine nicht sehr glückliche Versuchsanordnung bei Griliches und Rao zustandekommt. Durch eigene Zufallsexperimente kann Krämer nachweisen, daß in praxisrelevanten Situationen und auch für hochkorrelierte Störgrößen OLS den aufwendigeren Zweistufen-Verfahren ebenbürtig ist, so daß auch in dieser Situation kein Anlaß besteht, von der einfachen Methode abzugehen.

b) Algol-Programm zu 4d)

```

BEGIN
COMMENT  ALGOL-PROGRAMM ZUR EMPIRISCHEN BESTIMMUNG DER
PROGNOSEQUETE VERSCHIEDENER SCHAETZVERFAHREN IN
SIMULTANEN GLEICHUNGSSYSTEMEN;

INTEGER EXANZAHL, EXNUMMER, MS, GS, GA, L1, G, M, G1, T, Z,
MI, MAX1, MAX2;
BOOLEAN TEST;
REAL EPS1;
INPUT(60, <>, EPS1);
INPUT(60, </, F>, TEST);
INPUT(60, <>, EXANZAHL, T, L1, MS, GS, GA, M, G, G1,
MI, MAX1, MAX2);

BEGIN

ARRAY ENDOGEN[1: L1, 1: GS, 1: 1], EXOGEN[1: T+2, 1: MS, 1: 1],
STRUKTUR[1: 1, 1: GS, 1: GS], RESTGLIED[1: 1, 1: GS, 1: 1],
KOVERZ1[1: L1, 1: GS, 1: GS], KOEX[1: 1, 1: GS, 1: MI],
STOERUNG[1: 1, 1: GS, 1: 1], KORRELATION[1: GA],
VARIANZ[1: GA], QII[1: GA],
YY[1: T, 1: G], XX[1: T, 1: M], GG[1: G, 1: G], BB[1: M, 1: G];
REAL ZX, ZY, KW, PE;
BOOLEAN SING;
INTEGER I, J, K, N, JNGUELTIG;
INTEGER ARRAY A1, B1[1: G1], SINGULAER[1: 5],
MM[1: MI-MS],
TREFFER[1: 2, 1: 4, 1: J, 1: G],
SUM[1: G], SUM1[1: M], TA[1: G, 1: MAX1, 1: 4],
TB[1: M, 1: MAX2, 1: 4];
REAL PROCEDURE RNG(I); CODE 27601;
PROCEDURE INVEMATR(A, N, EPS, SING);
VALUE N, EPS;
INTEGER N; REAL EPS; ARRAY A; BOOLEAN SING; CODE 26102;
PROCEDURE MULT(I, J, P, L, M, N, A, B, C);
INTEGER I, J, L, M, N, P;
ARRAY A, B, C;
BEGIN
INTEGER K, H, F;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL L DO
FOR H:=1 STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
C[P, K, H]:=0;
FOR F:=1 STEP 1 UNTIL M DO
C[P, K, H]:=C[P, K, H]+A[I, K, F]*B[J, F, H];
END;
END;
PROCEDURE ANZEIGE(J, N);
INTEGER J, N;
BEGIN
INTEGER I;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
OUTPUT(61, <ZZ, JB>, TREFFER[1, J, N, I]);
OUTPUT(61, </, 7B>);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
OUTPUT(61, <ZZ, JB>, TREFFER[2, J, N, I]);
OUTPUT(61, </>);
END;

```

```

PROCEDURE AUSDRUCK(N);
INTEGER N;
BEGIN
  OUTPUT(61,</>);
  OUTPUT(61,<<OLS>,33>); ANZEIGE(1,N);
  OUTPUT(61,<<OLS>,33>); ANZEIGE(2,N);
  OUTPUT(61,<<TOLS>,33>); ANZEIGE(3,N);
  OUTPUT(61,<<SOLS>,33>); ANZEIGE(4,N);
  OUTPUT(61,</>);
END;

PROCEDURE MATAUS(N,O,FORMAT,M,K,S,T,A,B);
INTEGER N,O,FORMAT,M,K,S,T;
ARRAY A,B;
BEGIN
  INTEGER I,J;
  FOR I:=M STEP 1 UNTIL K DO
  BEGIN
    FOR J:=S STEP 1 UNTIL T DO
    BEGIN
      IF N=1 THEN
      BEGIN
        IF FORMAT=1 THEN
          OUTPUT(61,<-ZZD.O>,A(O,I,J));
        ELSE
          OUTPUT(61,<-ZD.OO,B>,A(O,I,J));
        END;
      IF N=3 THEN
      BEGIN
        IF FORMAT=1 THEN
          OUTPUT(61,<-ZZD.O>,A(I,J,O));
        ELSE
          OUTPUT(61,<-ZD.OO,B>,A(I,J,O));
        END;
      IF N=6 THEN
        OUTPUT(61,<-ZZD.O>,B(I,J));
      END;
      OUTPUT(61,</>);
    END;
  END;
  OUTPUT(61,</>);
END;
COMMENT ENDE DES HAUPT-VEREINBARUNGSTEILS.
ALS NAECHSTES EINGABETEIL;

```

```

Z:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
BEGIN
  INPUT(60,<>,A1(I),B1(I));
  Z:=Z+A1[I]+B1[I];
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G3 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G3 DO
INPUT(60,<>,STRUKTUR(I,I,J));
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G3 DO
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL G3 DO
INPUT(60,<>,KOVER(I,I,J,K));
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G3 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
INPUT(60,<>,KOFX(I,I,J));
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G3 DO
INPUT(60,<>,ENDOGEN(I,J,1));
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M3 DO
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL I+2 DO
INPUT(60,<>,EXOGEN(I,J,1));

```

```

FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
INPUT(60,<>,GG[I,J]);
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
INPUT(60,<>,BB[I,J]);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO
INPUT(60,<>,VARIANZ[I]);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO
INPUT(60,<>,KORRELATION[I]);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL MI-MB DO
INPUT(60,<>,MM[I]);
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL G DO
INPUT(60,<>,SU[K]);
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
INPUT(60,<>,SUM[K]);
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL G DO
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL SU[K] DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO
INPUT(60,<>,TAK[I,J]);
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL SUM[K] DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO
INPUT(60,<>,TB[K,I,J]);
COMMENT ENDE DES EINGABETEILS;

```

```

OUTPUT(61,<<VARIANZEN UND KORRELATIONEN>/,
27(<->),//>);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO
OUTPUT(61,<ZD.DD,BB>,VARIANZ[I]);
OUTPUT(61,<///>);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO
OUTPUT(61,<ZD.DD,BB>,KORRELATION[I]);
OUTPUT(61,<///,<MATRITZEN DER STRUKTURKOEFFIZIENTEN>,
/,35(<->),//>);
MATAUS(1,1,2,1,GS,1,GS,STRUKTUR,GG);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
MATAUS(1,1,2,1,GS,1,GS,KOEPFZ,GG);
MATAUS(1,1,2,1,GS,1,MI,KOEX,GG);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO
QQ[I]:=SQRT(VARIANZ[I]*(1-KORRELATION[I]*
KORRELATION[I]));
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO
VARIANZ[I]:=SQRT(VARIANZ[I]);
FOR I:=1,2 DO
FOR K:=1,2,3,4 DO
FOR J:=1,2,3 DO
FOR N:=1 STEP 1 UNTIL G DO
TREFFER(I,K,J,N):=0;
FOR I:=1,2,3,4,5 DO
SINGULAR(I):=0;
UNGUELTIG:=0;
PE:=4*ARCTAN(1);

```

BEGIN  
COMMENT BERECHNUNG DER REDUZIERTEN FORM DES REALMODELLS;

```

ARRAY ST(1: GS,1:GS),
KO(1: L1,1:GS,1:GS),KA(1:1,1:GS,1:MI);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
ST(I,J):=STRUKTUR(1,I,J);
INVMATR(ST,GS,EPS1,SING);
IF SING THEN GOTO ENDE;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
STRUKTUR(1,I,J):=ST(I,J);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
MULT(1,I,1,GS,GS,GS,STRUKTUR,KOVERZ,KO);
MULT(1,1,1,GS,GS,MI,STRUKTUR,KOEX,KA);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
KOVERZ(I,J,K):=KO(I,J,K);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL MI DO
KOEX(1,I,J):=KA(1,I,J);
OUTPUT(61,<*,<MATRITZEN DER REDUZIERTEN FORM>,
/,30(<->),//>);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
MATAUS(1,I,2,1,GS,1,GS,<KOVERZ,GG>);
MATAUS(1,1,2,1,GS,1,MI,<KOEX,GG>);
OUTPUT(61,<*,<ZEITPFAD DER EXOGENEN VARIABLEN>,
/,31(<->),//>);
MATAUS(3,1,1,0,T+2,1,MS,EXOGEN,GG);
END ;

```

COMMENT BERECHNUNG DER STARTWERTE FUER  
DIE STOERGRÖSSEN;

```

ZX:=RNG(0);
FOR I:=GA+1 STEP 1 UNTIL GS DO
STOERUNG(L,I,1):=STOERUNG(L,I,1):=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA/2 DO
BEGIN
ZX:=RNG(1); ZY:=RNG(1); WW:=SQRT(-2*LN(ZX));
STOERUNG(L,I*2-1,1) :=VARIANZ[I*2-1]*WW*COS(2*PE*ZY);
STOERUNG(L,I*2,1):=VARIANZ[I*2]*WW*SIN(2*PE*ZY);
END ;
ZX:=RNG(1); ZY:=RNG(1); WW:=SQRT(-2*LN(ZX));
STOERUNG(0,GA,1):=VARIANZ(GA)*WW*COS(2*PE*ZY);

```

FOR EXNUMMER:=1 STEP 1 UNTIL EXANZAHL DO

BEGIN

COMMENT ANFANG BLOCK A (DURCHFUEHRUNG DER ZUFALLSEXPERIMENTE);

ARRAY PROGNOSE(1: 12,1:1,1:1:G),XPLUS(1:3,1:1,1:1:M),  
ENDPLUS(1: 3,1:GS,1:1),YPLUS(1:3,1:1,1:1:G);

BEGIN

COMMENT ANFANG BLOCK AA  
(ERZEUGUNG DER ENDOGENEN VARIABLEN DLS REALMODELLS);

ARRAY ABY(1: L1,1:GS,1:1),ACZ(1:1,1:GS,1:1),  
EXOGGG(1: 1,1:MI,1:1);  
PROCEDURE ADDITION(I,J,K,A,B,C);  
INTEGER I,J,K;  
ARRAY A,B,C;  
BEGIN  
INTEGER H;  
FOR H:=1 STEP 1 UNTIL GS DO  
C(K,H,1):=A(I,H,1)+B(J,H,1);  
END ;  
IF TEST THEN  
OUTPUT(61,<\*,<ZEITPFAD DER ENDOGENEN VARIABLEN>,  
/,32(<->),//>);

FOR N:=1 STEP 1 UNTIL T DO

BEGIN

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL MS DO  
EXOGGG(1,I,1):=EXOGEN(N,I,1);  
FOR I:=MS+1 STEP 1 UNTIL MI DO  
EXOGGG(1,I,1):=EXOGEN(N-1,MI-I-MS,1);  
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO  
MULT(I,1,1,GS,GS,1,KOVERZ,ENDOGEN,ABY);  
MULT(1,1,1,GS,MI,1,KOEX,EXOGGG,ACZ);  
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL (L1-1) DO  
ADDITION(I,I+1,I+1,ABY,ABY,ABY);  
ADDITION(L1,1,0,ABY,ACZ,ENDOGEN);

M8:

BEGIN

COMMENT ERZEUGUNG VON NORMALVERTEILTEN  
ZUFALLSVARIABLEN MIT VORGEGEBENER AUROKORRELATION  
UND VARIANZ:

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA/2 DO

BEGIN

ZX:=RNG(1); ZY:=RNG(1); HW:=SQRT(-2\*LN(ZX));  
STOERUNG(1,2\*I-1,1):=KORRELATION(2\*I-1)\*STOERUNG(1,2\*I-1,1)  
+QQ(2\*I-1)\*WW\*COS(2\*PE\*ZY);  
STOERUNG(1,2\*I,1):=KORRELATION(2\*I)\*STOERUNG(1,2\*I,1)  
+QQ(2\*I)\*WW\*SIN(2\*PE\*ZY);

END ;

IF GA/2 +0.9> I THEN

BEGIN

ZX:=RNG(1); ZY:=RNG(1); HW:=SQRT(-2\*LN(ZX));  
STOERUNG(1,GA,1):=KORRELATION(GA)\*STOERUNG(1,GA,1)  
+QQ(GA)\*WW\*COS(2\*PE\*ZY);

END ;

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GA DO

IF ABS(STOERUNG(1,I,1))>2\*VARIANZ(1)\*VARIANZ(I) THEN

GOTO M8;

MULT(1,1,1,GS,GS,1,STRUKTUR,STOERUNG,RESTGLES);

```

ADDITION(1,C,0,RESTGLIED,ENDOGEN,ENDOGEN);
IF TEST THEN
BEGIN
OUTPUT(61,</,ZZDWB>,N);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
OUTPUT(61,<-ZZD.O,B>,ENDO,EN(C,I,1));
END ;

```

```

BEGIN
COMMENT WERTZUWEISUNG AN DIE VARIABLEN DES SCHAFTZMODELLS;

```

```

FOR K:=1 STEP 1 UNTIL G DO
BEGIN
YY(N,K):=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL SU(K) DO
YY(N,K):=
IF TAK(J,2)=1 THEN
YY(N,K)+TAK(J,1)*
ENDOGEN(TAK(J,3),TAK(J,4),1)
ELSE
YY(N,K)+TAK(J,1)*
EXOGEN(N-TAK(J,3),TAK(J,4),1);
END ;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
XX(N,K):=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL SUM(K) DO
XX(N,K):=
IF TB(K,J,2)=1 THEN
XX(N,K)+TB(K,J,1)*
ENDOGEN(TB(K,J,3),TB(K,J,4),1)
ELSE
XX(N,K)+TB(K,J,1)*
EXOGEN(N-TB(K,J,3),TB(K,J,4),1);
END ;
END ;
COMMENT TAUSCH DER Y-WERTE;
FOR I:=L1 STEP -1 UNTIL 1 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
ENDOGEN(I,J,1):=ENDOGEN(I-1,J,1);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
STOERUNG(I,I,1):=STOERUNG(1,I,1);

```

```

END ENDE VARIABLENERZEUGUNG;

```

```

COMMENT ERZEUGUNG DER ENDOGENEN ZUKUNFTSWERTE
DES REALMODELLS;

```

```

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL L1 DO
MULT(I,I,1,GS,GS,1,KOVERZ,ENDOGEN,ABY);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL (L1-1) DO
ADDITION(I,I+1,I+1,ABY,ABY,ABY);
FOR I:=MS+1 STEP 1 UNTIL MI DO
EXOGGG(1,1,1):=EXOGEN(T,NH(I-MS),1) ;
FOR I:=0,1,2 DO
BEGIN
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL MS DO
EXOGGG(1,J,1):=EXOGEN(I+J,1,1);
MULT(1,1,1,GS,MI,1,KOEX,EXOGGG,ACZ);
ADDITION(L1,1,I+1,ABY,ACZ,ENDPLUS);

```

COMMENT WERTZUWEISUNG AN DIE ZUKUNFTSWERTE  
DES SCHAKETMODELLS;

```
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL G DO
BEGIN
YPLUS[I+1,1,K]:=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL SU[K] DO
YPLUS[I+1,1,K]:=
IF TA[K,J,2]=1 THEN
YPLUS[I+1,1,K]+TA[K,J,1]*
ENDPLUS[I+1,TA[K,J,4],1]
ELSE
YPLUS[I+1,1,K]+TA[K,J,1]*
EXOGEN[T+1,TA[K,J,4],1];
END ;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
XPLUS[I+1,1,K]:=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL SU[K] DO
XPLUS[I+1,1,K]:=
IF TB[K,J,2]=0 THEN
XPLUS[I+1,1,K]+TB[K,J,1]*
EXOGEN[T+1,TB[K,J,4],1]
ELSE
( IF TB[K,J,3]=0 THEN
XPLUS[I+1,1,K]+TB[K,J,1]*
ENDPLUS[I+1,TB[K,J,4],1]
ELSE
XPLUS[I+1,1,K]+TB[K,J,1]*
ENDOGEN[TB [K,J,3],TB[K,J,4],1]);
END ;
END ;
IF TEST THEN
BEGIN
OUTPUT(61,</>);
FOR I:=1,2,3 DO
BEGIN
OUTPUT(61,</,5R>);
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL GS DO
OUTPUT(61,<-ZZD.0,B>,ENDPLUS[I,J,1]);
END ;
END ;
```

END ENDE BLOCK AA;

BEGIN  
 COMMENT ANFANG BLOCK 40 (DURCHFUEHRUNG DER SCHAETZUNGEN);

```

INTEGER L,W,N,R,Q,X,Y;
REAL K1,L1,DET;
BOOLEAN REPEAT,SING;
ARRAY VO[1: T,1:G],
      PI, XSY[1: M,1:G], ZZS[1:Z,1:G1*M],
      SI[1: G1,1:G1],      ZZ[1:G1*M,1:Z], GO[1:G ,1:G1,0:2],
      BD[1: M,1:G1,0:2], UU[1:T,1:G1,0:1], XXS[1:M,1:T],
      XSX[1: M,1:M], YA, UU[1:T,1:1], YP[1:G1*M,1:1], Y1[1:M,1:1];
PROCEDURE GAUSS(A,B,M,N,EPS,REPEAT,X,PIVOT,DET,SING);
  VALUE M,N,G;  INTEGER M,N;  ARRAY A,B,X;
  REAL DET,EPS;  BOOLEAN REPEAT;  INTEGER ARRAY PIVOT;
  LABEL SING;  CODE 26401;
  PROCEDURE MULTIPLIKATION (I,J,K,A,B,C);
    INTEGER I,J,K;
    ARRAY A,B,C;
    BEGIN
      INTEGER L,M,H;
      FOR L:=1 STEP 1 UNTIL I DO
        FOR M:=1 STEP 1 UNTIL K DO
          BEGIN
            C[L,M]:=0;
            FOR H:=1 STEP 1 UNTIL J DO
              C[L,M]:=C[L,M]+A[L,H]*B[H,M];
            END ;
          END ;
        PROCEDURE AUSGABE(L);  INTEGER L;
        BEGIN
          FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
            OUTPUT(61,<9,-0.00>,GO[J,I,L]);
          FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
            OUTPUT(61,<9,-0.00>,BD[J,I,L]);
          OUTPUT(61,<7/>);
        END ;
        PROCEDURE DRUCK(N);
        INTEGER N;
        BEGIN
          FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
            OUTPUT(61,<-ZZZD.0,JB>,PROGNOSE[(N-1)*3+1,1,I]);
          FOR J:=2,3 DO
            BEGIN
              OUTPUT(61,<7,75>);
              FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
                OUTPUT(61,<-ZZZD.0,88>,PROGNOSE[(N-1)*3+J,1,I]);
            END ;
          END ;
          R:=Q:=0;

```

```

BEGIN
COMMENT  OLS-SCHAEZUNG DER REDUZIERTEN FORM;

ARRAY X,Y(1:M),XXX(1:M,1:M);
INTEGER  ARRAY  PIVOT(1:1);

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1*M DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Z DO
ZZ(I,J):=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
XXS(I,I):=XX(I,J);
MULTIPLIKATION(M,T,M,XXS,XX,XXS);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
XXX(I,J):=XSX(I,J);
IF TEST THEN
BEGIN
OUTPUT(61,<///,<ENDOGENE UND EXOGENE MODELLVARIABLE>,
/,35(<->),//>);
MATAUS(C,C,C,1,T,1,G,KOEX,YY);
MATAUS(G,C,C,0,1,T,1,M,KOEX,XX);
END ;
MULTIPLIKATION(M,T,G,XXS,YY,XSY);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
BEGIN
IF I=1 THEN REPEAT:= FALSE  ELSE REPEAT:= TRUE ;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
Y(J):=XSY(J,I);
GAUSS(XXX,Y,1,M,C,C,1 ,REPEAT,X,PIVOT,DET,SING2);
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
PI(I,J):=X(J);
END ;
INVMATR(XSX,M,EPS1,SING);
IF SING THEN GOTO SING1;
MULTIPLIKATION(T,M,G,XX,PI,VD);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
VD(I,J):=YY(I,J)-VD(I,J);
END ;

FOR L:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO

BEGIN
COMMENT  OLS- UND TSLS-SCHAEZUNG;

Y:=A1(L); X:=R1(L); W:=X+Y;
IF Y=0 THEN Y:=1;
IF X=0 THEN X:=1;

BEGIN
ARRAY  YS,VS(1:T,1:Y),XS(1:T,1:X),ZS(1:T,1:W),
XZ(1:M,1:W),XSS(1:X,1:T),IM(1:W,1:W),YSS,VSS(1:Y,1:T),
NN,SS(1:W,1:1),NA,NB(1:Y,1:Y),NC(1:Y,1:X),ND(1:X,1:Y),
ME(1:X,1:X),NA,NB(1:Y,1:1),NC(1:X,1:1),VA(1:T,1:1);

Y:=A1(L); X:=R1(L);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
YA(I,1):=YY(I,L);
MULTIPLIKATION(M,T,1,XXS,YA,Y1);
FOR I:=(L-1)*M+1 STEP 1 UNTIL L*M DO
YP(I,1):=Y1(I-(L-1)*M,1);

```

```

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
BEGIN
N:=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
BEGIN
MARKE:
N:=N+1;
IF N>G THEN GOTO M1;
IF GG[N,L] = 0 THEN GOTO MARKE ELSE
BEGIN
YS[I,J]:=YY[I,N];VS[I,J]:=VO[I,N];
END ;
M1:
END :
END ;

```

```

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
BEGIN
N:=0;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL X DO
BEGIN
MARK:
N:=N+1;
IF N>M THEN GOTO M2;
IF BB[N,L] = 0 THEN GOTO MARK ELSE
XS[I,J]:=XX[I,N];
M2:
END :
END ;

```

```

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
BEGIN
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
ZS[I,J]:=YS[I,J];
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL X DO
ZS[I,Y+J]:=XS[I,J];
END ;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
BEGIN
YSS[J,I]:=YS[I,J]; VSS[J,I]:=VS[I,J];
END ;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL X DO
XSS[J,I]:=XS[I,J];

```

```

MULTIPLIKATION(M,T,W,XS,ZS,XZ);
FOR I:=R+1 STEP 1 UNTIL R+M DO
FOR J:=Q+1 STEP 1 UNTIL Q+W DO
ZZ[I,J]:=XZ[I-R,J-Q];
R:=R+M;Q:=Q+W;

```

```

MULTIPLIKATION(Y,T,Y,YSS,YS,MA);
MULTIPLIKATION(Y,T,Y,VSS,VS,MB);
MULTIPLIKATION(Y,T,1,YSS,YA,NA);
MULTIPLIKATION(Y,T,1,VSS,YA,NB);
MULTIPLIKATION(X,T,1,XSS,YA,NC);
MULTIPLIKATION(X,T,X,XSS,XS,NE);
MULTIPLIKATION(X,T,Y,XSS,YS,ND);
MULTIPLIKATION(Y,T,X,YSS,XS,MC);

```

```

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
FOR J:=Y+1 STEP 1 UNTIL 4 DO
MM[I,J]:=MC[I,J-Y];
FOR I:=Y+1 STEP 1 UNTIL W DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
MM[I,J]:=MC[I-Y,J];
FOR I:=Y+1 STEP 1 UNTIL 4 DO
FOR J:=Y+1 STEP 1 UNTIL 4 DO
MM[I,J]:=MC[I-Y,J-Y];
FOR I:=Y+1 STEP 1 UNTIL W DO
NN[I,1]:=NC[I-Y,1];

```

```

FOR K:=0,1 DO

```

```

BEGIN
ARRAY MQ[1: W,1:W],SA,UA[1:W];
INTEGER ARRAY PIVOT[1: W];

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
MM[I,J]:=MA[I,J]-K*MB[I,J];
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL W DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL W DO
MQ[I,J]:=MM[I,J];
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL Y DO
NN[I,1]:=NA[I,1]-K*NB[I,1];
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL W DO
UA[I]:=NN[I,1];
GAUSS(MQ,UA,1,W,C.0011, FALSE ,SA,PIVOT,DET,SING);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL W DO
SS[I,1]:=SA[I];

```

```

J:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
BEGIN
IF GG[I,L] = 0 THEN
GD[I,L,K]:=0
ELSE
BEGIN
J:=J+1;
GD[I,L,K]:=SS[J,1];
END ;
END ;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO
BEGIN
IF BD[I,L] = 0 THEN
BD[I,L,K]:=0
ELSE
BEGIN
J:=J+1;
BD[I,L,K]:=SS[J,1];
END ;
END ;
MULTIPLIKATION(T,W,1,ZS,SS,UU);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL T DO
UU[I,L,K]:=YA[I,1]-UU[I,1];
END ;

END ;
ENDE OLS- UND TSLS-SCHAEZUNG;

```

```

BEGIN
COMMENT 3SLS-SCHAETZUNG;
INTEGER ARRAY PIVOT[1: Z];
ARRAY ZA[1: Z,1:G1*M],Z[1:7,1:Z],VP[1:G1*M,1:G1*M],
DDD,DAA[1: Z],
DO,UA[1: Z,1:1];

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
BEGIN
SII[I,J]:=0;
FOR X:=1 STEP 1 UNTIL T DO
SII[I,J] :=SII[I,J] +UD[X,I,1]*UD[X,J,1];
SII[I,J]:=SII[I,J]/T;
END ;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1*M DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL Z DO
ZZS[J,I]:=ZZ[I,J];

INVMATR(SI,G1,EPS1,SING);
IF SING THEN GOTO SING4;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
FOR Q:=1 STEP 1 UNTIL M DO
FOR R:=1 STEP 1 UNTIL M DO
VP[(I-1)*M+Q,(J-1)*M+R]:=SI[I,J]*XSX[Q,R];
MULTIPLIKATION(Z,G1*M,G1*M,ZZS,VP,ZA);
MULTIPLIKATION(Z,G1*M,Z,ZA,ZZ,ZB);
MULTIPLIKATION(Z,G1*M,1,ZA,YP,DA);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL Z DO
DAA[I]:=DAA[I,1];
GAUSS(ZB,DAA,1,Z,0.001, FALSE ,DDD,PIVOT,DET,SING1);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL Z DO
DO[I,1]:=DDD[I];

X:=1;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
BEGIN
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
IF GG[J,I] = 0 THEN
GD[J,I,2]:=0
ELSE
BEGIN
GD[J,I,2]:=DD[X,1]; X:=X+1;
END ;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
IF BB[J,I] = 0 THEN
BD[J,I,2]:=0
ELSE
BEGIN
BD[J,I,2]:=DD[X,1];
X:=X+1;
END ;
END ;
END ENDE 3SLS-SCHAETZUNG;

```

```

BEGIN
COMMENT  PROGNOSE DER ZUKUNFTSWERTE DER
ENDOGENEN VARIABLEN DES SCHATZMODELLS;

ARRAY  PIC(1:4,1:M,1:G),GDO(1:G,1:G),BDO(1:M,1:G);

FOR N:=1,2,3,4 DO
BEGIN
IF N=1 THEN
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
PID(N,I,J):=PI(I,J);
IF N>1 THEN
BEGIN
FOR J:=G1+1 STEP 1 UNTIL G DO
BEGIN
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
GDO(I,J):=GG(I,J);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BDO(I,J):=BB(I,J);
END ;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
BEGIN
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G DO
GDO(I,J):=-GDI(I,J,N-2);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BDO(I,J):=-BDI(I,J,N-2);
END ;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO  GDO(I,I):=1;
INVMATR(GDO,G,EPS1,SING);
IF SING THEN GOTO SING5;
MULTIPLIKATION(M,G,G,BDO,GDO,PI);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
PID(N,I,J):=PI(I,J);
END ;
FOR K:=1,2,3 DO
MULT(K,N,(N-1)*3+K,1,M,G,XPLUS,PID,PROGNOSE);
END ;
END  ENDE PROGNOSE;

```

```

COMMENT  VERGLEICH VON PROGNOSE MIT WAHREM WERT;
L:=0;
FOR I:=1,5 DO
BEGIN
L:=L+1;
FOR N:=1,2,3,4 DO
FOR K:=1,2,3 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL G DO
IF
ABS( (PROGNOSE((N-1)*3+K,1,J))-YPLUS(K,1,J))/YPLUS(K,1,J))
< 1/100
THEN TREFFER(L,N,K,J):=TREFFER(L,N,K,J)+1;
END ;

```

```

IF TEST THEN
BEGIN
  OUTPUT (61, <///, 7B, <SCHAETZWERTE>, /, 7B, 12(<->) >);
  FOR I:=1 STEP 1 UNTIL G1 DO
  BEGIN
    OUTPUT (61, <///, 0, <GLEICHUNG>, ///, I);
    OUTPUT (61, <<OLS>, 5B>);
    AUSGABE(0);
    OUTPUT (61, <<2SLS>, 4B>);
    AUSGABE(1);
    OUTPUT (61, <<3SLS>, 4B>);
    AUSGABE(2);
  END;
  OUTPUT (61, <///, <PROGNOSEN>, /, 9(<->), ///);
  OUTPUT (61, <<OLS >, 3B>); DRUCK(1);
  OUTPUT (61, </>);
  OUTPUT (61, <<CLS >, 3B>); DRUCK(2);
  OUTPUT (61, </>);
  OUTPUT (61, <<SLS>, 3B>); DRUCK(3);
  OUTPUT (61, </>);
  OUTPUT (61, <<3SLS>, 3B>); DRUCK(4);
END;

```

END ENDE BLOCK AB;

```

GOTO M6;
SING1: SINGULAER[1]:=SINGULAER[1]+1;
GOTO M5;
SING2: SINGULAER[2]:=SINGULAER[2]+1;
GOTO M5;
SING3: SINGULAER[3]:=SINGULAER[3]+1;
GOTO M5;
SING4: SINGULAER[4]:=SINGULAER[4]+1;
GOTO M5;
SING5: SINGULAER[5]:=SINGULAER[5]+1;
M5: UNGUELTIG:=UNGUELTIG+1;
M6:

```

END ENDE BLOCK A;

END;

GOTO ENDE2;

ENDE:

OUTPUT (61, <///<KOEFFIZIENTENMATRIX DER ENDOGENEN VARIABLEN NICHT INVERTIERBAR>>);

ENDE2;

END ENDE DES PROGRAMMS;

Literaturverzeichnis

Amemiya, T.: "The Non-Linear Two-Stage Least Squares Estimator", J. of E. 2, 1974, 105-110

Anderson, T.W.: "On the Theory of Testing Serial Correlation", Skand. Aktuarietidskr. 31, 1948, 88-116

Anderson, T.W.: "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis", New York 1958

Anderson, T.W. und Rubin, H.: "Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations", AMS 20, 1949, 46-63

Atkinson, A.C. und Pearce, M.C.: "The Computer Generation of Beta, Gamma and Normal Pandom Variables", Journal of the Royal Statistical Society A 139, 1976, 431-447

Balestra, P.: "On the Efficiency of Ordinary Least Squares in Regression Models", JASA 65, 1970, 1330-1336

Pasman, R.L.: "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-Identified Cases", JASA 56, 1961, 619-636

Basman, R.L.: "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in a Leading Three Equations Case", JASA 58, 1963, 161-171

Basman, R.L.: "Exact Finite Sample Distributions of some Econometric Estimators and Test Statistics: A Survey and Appraisal", in:  
Intriligator, M.D. und Kendrick, D.A. (Hg.): "Frontiers of Quantitative Economics, Vol. II", Amsterdam 1974

Basman, P.L., Richardson, D.H. und Pohl, R.J.:  
"An Experimental Study of Structural Estimators and Test Statistics Associated with Dynamical Econometric Models", Econometrica 42, 1974, 717-730

Bergstrom, A.R.: "The Exact Sampling Distribution of Least Squares and Maximum Likelihood Estimators of the Marginal Propensity to Consume", *Econometrica* 30, 1962, 480-490

Box, G.F.P. und Muller, M.E.: "A Note on the Generation of Random Normal Deviates", *AMS* 29, 1958, 610-611

Brown, T.M.: "Simultaneous Least Squares: A Distribution Free Method of Equation System Structure Estimation", *IER* 1, 1960, 173-191

Carter, R.A.: "Small Sample Properties of Three Econometric Methods of Estimation", D.Th., Queens University 1971

Chipman, J.S.: "Efficiency of Least Squares Estimation of Linear Trend when Residuals are Autocorrelated", *Econometrica* 47, 1979 (erscheint noch)

Chipman, J.S., Kadiyala, K., Madansky, A. und Pratt, J.W.: "Efficiency of the Sample Mean when Residuals Follow a First-Order Stationary Markoff Process", *JASA* 63, 1968, 1237-1246

Chow, G.C.: "A Comparison of Alternative Estimators for Simultaneous Equations", *Econometrica* 32, 1964, 532-553

Chow, G.C.: "A Family of Estimators for Simultaneous Equation Systems", *IER* 15, 1974, 654-666

Chow, G.C.: "A Reformulation of Simultaneous Equations Models for Markets in Disequilibrium", Research Memorandum No. 213, Princeton University 1977

Conlisk, J.: "Optimal Response Surfaces Design in Monte Carlo Sampling Experiments", *AESM* 3, 1974, 463-473

Cragg, J.G.: "On the Sensitivity of Simultaneous Equation Estimators to the Stochastic Assumptions of the Model", *JASA* 61, 1966, 136-151

Cragg, J.G.: "On the Relative Small Sample Properties of Several Structural Equation Estimators", *Econometrica* 35, 1967, 89-110

Cragg, J.G.: "Some Effects of Incorrect Specification on Small Sample Properties of Several Simultaneous Equation Estimators", *IER* 9, 1968, 63-86

Dhrymes, P.J., Berner, P. und Cummins, D.:

"A Comparison of Some Limited Information Estimators for Dynamic Simultaneous Equation Models with Auto-correlated Errors", *Econometrica* 42, 1974, 311-332

Dieckheuer, G.: "Realeinkommen-, Preis- und Zins-effekte der Fiskalpolitik, untersucht mit einem ökonometrischen Modell für die Bundesrepublik Deutschland", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 132, 1976, 422-470

Fair, R.C.: "The Estimation of Simultaneous Equation Models with Lagged Endogenous Variables and First Order Serially Correlated Errors", *Econometrica* 38, 1970, 507-515

Fair, R.C. und Jaffee, D.: "Methods of Estimation for Markets in Disequilibrium", *Econometrica* 40, 1972, 497-514

Fisher, F.M.: "On the Cost of Approximate Specification in Simultaneous Equation Systems", *Econometrica* 29, 1961, 139-170

Fisher, F.M.: "The Place of Least Squares in Econometrics: Comment", *Econometrica* 30, 1962, 565-567

Fisher, F.M.: "The Identification Problem in Econometrics", New York 1966

Fisher, F.M.: "The Relative Sensitivity to Specification Error of Different k-Class Estimators", *JASA* 61, 1966, 345-356

Fisher, F.M.: "Approximate Specification and the Choice of a k-Class Estimator", *JASA* 62, 1967, 1265-1276

Glahe, F.R. und Hunt, J.G.: "The Small Sample Properties of Simultaneous Equations Least Absolute Estimators vis à vis Least Squares Estimators", *Econometrica* 38, 1970, 742-752

Grenzdörfer, K.: "Vergleich einiger in der Ökonometrie verwendeter Schätzverfahren mittels Simulation von Drei-Gleichungssystemen", Würzburg 1969

- Griliches, Z. und Rao, P.: "Small Sample Properties of Several Two-Stage Regression Methods in the Context of Autocorrelated Errors", JASA 64, 1969, 253-272
- Haavelmo, T.: "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations", Econometrica 11, 1943, 1-12
- Haavelmo, T.: "The Role of the Econometrician in the Advancement of Economic Theory", Econometrica 26, 1958, 351-357
- Hansen, G.: "Die Prognoseeignung von LISE- und FIND-Maximum-Likelihood Schätzwerten", Statistische Hefte 10, 1969, 22-45
- Hatanaka, M.: "Several Efficient Two-Step Estimators for the Dynamic Simultaneous Equation Model with Autoregressive Disturbances", J. of E. 4, 1976, 189-204
- Hausman, J.A.: "The Full Information Instrumental Variables Estimation of Simultaneous Equation Systems", AESM 3, 1974, 641-653
- Hendry, D. und Srba, F.: "The Properties of Autoregressive Instrumental Variables Estimators in Dynamic Systems", Econometrica 45, 1976, 969-990
- Hildreth, C.: "Simultaneous Equations - Any Verdict Yet?", Econometrica 28, 1960, 846-853
- Hurd, M.D.: "Small Sample Estimation of a Structural Equation with Auto-Correlated Errors", JASA 67, 1972, 567-573
- Intriligator, M.D. (Hg.): "Frontiers of Quantitative Economics", Amsterdam 1971
- Intriligator, M.D. und Kendrick, D.A. (Hg.): "Frontiers of Quantitative Economics, Vol. II", Amsterdam 1974
- Johnston, J.: "Econometric Methods", 1. Auflage New York 1963, 2. Auflage New York 1972
- Kabo, D.G.: "A Note on the Exact Distribution of the GCL-Estimators in Two Leading Over-Identified Cases", JASA 58, 1963, 535-537

- Kabe, D.G.: "On the Exact Distributions of the GCL-Estimators in a Leading Three Equations Case", JASA 59, 1964, 881-894
- Kadiyala, K.R.: "An Exact Small Sample Property of the k-Class Estimator", Econometrica 38, 1970, 930-932
- Kadane, J.B.: "Comparison of k-Class Estimators when Disturbances are Small", Econometrica 39, 1971, 723-738
- Keller, W.J.: "A New Class of Limited Information Estimators for Simultaneous Equation Systems", J. of E. 3, 1975, 71-92
- Khazzoom, J.D.: "An Indirect Least Squares Estimator for Overidentified Equations", Econometrica 44, 1976, 741-750
- Klein, L.R.: "Economic Fluctuations in the United States 1921 - 1941", New York 1950
- Klein, L.R.: "On the Interpretation of Theil's Method of Estimating Economic Relationships", Metroeconomica 7, 1955, 147-153
- Klein, L.R.: "Single Equation vs. System Methods of Estimation in Economics", Econometrica 28, 1960, 866-871
- Klein, L.R.: "Forecasting and Policy Evaluation Using Large Scale Econometric Models: The State of the Art", in: Intriligator, M.D. (Hg.): "Frontiers of Quantitative Economics", Amsterdam 1971
- Klein, L.R. und Goldberger, A.S.: "An Econometric Model of the United States 1929 - 1952", Amsterdam 1955
- Krämer, W.: "Das Problem der Autokorrelation in ökonometrischen Modellen", Diplomarbeit, vorgelegt dem Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Mainz, 1976
- Kruskal, W.: "When are Gauss-Markov and Least Squares Estimators Identical? A Coordinate-Free Approach", AMS 39, 1968, 70-75

Ladd, G.W.: "Effects of Shocks and Errors in Estimation: An Empirical Comparison", Journal of Farm Economics 38, 1956, 485-495

Liu, T.C.: "Underidentification, Structural Estimation, and Forecasting", Econometrica 28, 1960, 855-865

Magness, T.A. und McGuire, J.B.: "Comparison of Least Squares and Minimum Variance Estimators of Regression Parameters", AMS 33, 1962, 462-470

Maeshiro, A.: "A Simple Mathematical Relationship among k-class Estimators", JASA 61, 1966, 368-374

Mariano, R.S.: "The Existence of Moments of the Ordinary Least Squares and Two-Stage-Least-Squares Estimators", Econometrica 40, 1972, 643-652

Mariano, R.S.: "Some Large Concentration Parameter Asymptotics for the k-Class Estimator", J.of E. 3, 1975, 171-177

Mariano, R.S. und Sawa, T.: "The Exact Finite Sample Distribution of the Limited-Information-Maximum-Likelihood Estimator in the Case of Two Included Endogenous Variables", JASA 67, 1972, 159-163

McCarthy, M.D.: "A Note on the Forecasting Properties of Two-Stage-Least-Squares Restricted Reduced Forms - The Finite Sample Case", IER 13, 1972, 757-761

McElroy, F.W.: "A Necessary and Sufficient Condition that Ordinary Least Squares Estimators Be Best Linear Unbiased", JASA 62, 1967, 1302-1304

Mikhail, W.M.: "A Comparative Monte Carlo Study of the Properties of Econometric Estimators", JASA 70, 1975, 94-104

Muellbauer, J.: "Macrotheory vs. Macroeconometrics: The Treatment of "Disequilibrium" in Macromodels", Discussion Paper No. 59, Birkbeck College, London 1978

Naqar, A.L.: "The Bias and Moment Matrix of the General k-Class Estimators of the Parameters in Simultaneous Equations", Econometrica 27, 1959, 575-595

Nagar, A.L.: "A Monte Carlo Study of Alternative Simultaneous-Equation Estimators", *Econometrica* 28, 1960, 573-590

Nagar, A.L.: "Double k-class Estimators of Parameters in Simultaneous Equations and Their Small Sample Properties", *IER* 3, 1962, 168-188

Neiswanger, W.A. und Yancey, T.A.: "Parameter Estimates and Autonomous Growth", *JASA* 54, 1959, 389-402

Nerlove, M.: "A Tabular Survey of Macroeconometric Models", *IER* 7, 1966, 127-175

Newman, T.G. und Odell, P.L.: "The Generation of Random Variates", London 1971

Oi, W.Y.: "On the Relationship among Different Members of the k-Class", *IER* 10, 1969, 36-46

Owen, L.D.: "A Proof that both the Bias and the Mean Square Error of the Two-Stage-Least-Squares Estimator Are Monotonically Non-Increasing Functions of Sample Size", *Econometrica* 44, 1976, 409-411

Quandt, R.E.: "On Certain Small Sample Properties of k-Class Estimators", *IER* 6, 1965, 92-104

Richardson, D.H.: "The Exact Distribution of a Structural Coefficient Estimator", *JASA* 63, 1968, 1214-1226

Richardson, D.H. und Fu, D.M.: "A Note on the Comparison of Ordinary and Two-Stage-Least-Squares Estimators", *Econometrica* 39, 1971, 973-981

Rothenberg, T.J. und Leenders, C.T.: "Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems", *Econometrica* 32, 1964, 57-76

Savin, N.E.: "Systems k-Class Estimators", *Econometrica* 41, 1973, 1125-1136

Sawa, T.: "The Exact Sampling Distribution of Ordinary Least Squares and Two-Stage-Least-Squares Estimators", JASA 64, 1969, 923-937

Sawa, T.: "Finite Sample Properties of the k-Class Estimators", Econometrica 40, 1972, 653-680

Sawa, T.: "The Mean Square Error of a Combined Estimator and Numerical Comparison with the TSLS Estimator", J. of E. 1, 1973, 115-132

Schink, W.A. und Chiu, J.S.: "A Simulation Study on the Influence of Multicollinearity and Autocorrelation on Estimates of Parameters", Journal of Financial and Quantitative Analysis 1, 1966, 36-67

Schönfeld, P.: "Methoden der Ökonometrie", Berlin 1969

Schneeweiß, H.: "Ökonometrie", 2.Auflage Würzburg 1974

Seibt, H.: "Schätzung und Prognose bei simultanen Gleichungsmodellen; Eine Monte-Carlo Untersuchung", Göttingen 1968

Smith, V.K.: "A Monte Carlo Experiment with a Large Macro-Econometric Model", Western Economic Journal 8, 1970, 377-384

Smith, V.K.: "Economic Anonymity and Monte Carlo Studies", Applied Economics 3, 1971, 35-46

Smith, V.K.: "A Comparative Tabular Survey of Monte Carlo and Exact Sampling Studies", Australian Economic Papers 10, 1971, 196-202

Sowey, E.R.: "A Classified Bibliography of Monte Carlo Studies in Econometrics", J. of E. 1, 1973, 377-395

Srinivasan, T.N.: "Least Squares and Conditional Prediction", Econometrica 33, 1965, 244

Stöwe, H.: "Ökonometrie", Meisenheim 1977

Strand, O.N.: "Coefficient Errors Caused by Using the Wrong Covariance Matrix in the General Linear Model", Annals of Statistics 2, 1974, 935-949

Summers, R.: "A Capital Intensive Approach to the Small Sample Properties of Various Simultaneous Equation Estimators", *Econometrica* 33, 1965, 1-41

Takeuchi, K.: "On the Exact Moment of the OLS, TSLS and the Instrumental Variables Method Estimator", *IER* 11, 1970, 1-12

Theil, H.: "Repeated Least Squares Applied to Complete Equation Systems", Unveröffentlichtes Manuskript des Central Planning Bureau, Den Haag 1952

Theil, H.: "Economic Forecasts and Policy", 2. Auflage Amsterdam 1961

Theil, H.: "Principles of Econometrics", Amsterdam 1971

Theil, H. und Goldberger, A.S.: "On Pure and Mixed Statistical Estimation in Econometrics", *IER* 2, 1961, 65-78

Tintner, G. und Kadekodi, G.: "A Note on the Use of Differences and Transformations in the Estimation of Economic Relations", *Sankya* 35, Serie B, 1973, 268-277

Ullah, A. und Nagar, A.I.: "The Exact Mean of the Two-Stage-Least-Squares Estimator of the Structural Parameters in an Equation Having Three Endogenous Variables", *Econometrica* 42, 1974, 749-758

Wagner, H.M.: "A Monte Carlo Study of Estimates of Simultaneous Linear Structural Equations", *Econometrica* 26, 1958, 117-133

Wallace, T.D. und Hussain, A.: "The Use of Error Components Models in Combining Cross-Section with Time Series Data", *Econometrica* 37, 1969, 55-72

Watson, G.S.: "Linear Least Squares Regression", *AMS* 38, 1967, 1679-1699

Waugh, F.V.: "The Place of Least Squares in Econometrics", *Econometrica* 29, 1961, 386-396

Weld, H.: "Demand Analysis", New York 1953

Wold, H.: "Causality and Econometrics", *Econometrica* 22, 1954, 162-174

Wold, H.: "Nonexperimental Statistical Analysis from the General Point of View of Scientific Method", *Bulletin of the International Statistical Institute* 42, 1967, 391-425

Wold, H. und Mosbaek, E.: "Interdependent Systems - Structure and Estimation", Amsterdam 1970

Zarembka, P.: "Functional Form and the Demand for Money", *JASA* 63, 1968, 502-511

Zellner, A.: "An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics", New York 1971

Zellner, A. und Theil, H.: "Three-Stage-Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations", *Econometrica* 30, 1962, 54-78

Zyskind, G.: "On Canonical Formes, Non-Negative Covariance Matrices and Best and Simple Least Squares Estimators in Linear Models", *AMS* 38, 1967, 1092-1109

Zyskind, G.: "Parametric Augmentations and Error Structures under which Certain Simple Least Squares and Analysis of Variance Procedures are also Best", *JASA* 64, 1969, 1353-1368

## Lebenslauf

- 21.11.1948 geboren als Sohn des Zollbeamtenehepaares Valentin und Anna Krämer in Ormont/Eifel.
- 1954-1960 Besuch der einklassigen katholischen Volksschule in Winterscheid/Eifel
- 1961-1968 Besuch des Gymnasiums am Kurfürstlichen Schloß in Mainz
- 1968 Abitur
- 1968-1969 Ableistung des Grundwehrdienstes bei der Bundeswehr
- 1969-1976 Studium der Mathematik und Volkswirtschaftslehre an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
- 1976 Diplomprüfung in Mathematik
- 1976-1979 zunächst Lehrassistent, dann wissenschaftlicher Mitarbeiter am Seminar für Statistik der Universität Mannheim





